力学系の理論

白岩謙一著

数学選書

岩波書店

力学系の理論

力学系の理論

白岩謙一 著

数学選書

岩波書店

はしがき

自然科学および社会科学に現われる諸現象が，時間と共に変化する状況を，数学的に記述しようとするとき，常微分方程式を用いると都合がよいことが多い．たとえば，2つの天体がNewtonの万有引力の法則のもとで運動するとき，これは常微分方程式によって表現され，求積法によってその解を完全に決定することができる．

このように，常微分方程式を実際に解くことによって，問題が解決されることも多い．しかし，求積法などによって解を完全に記述することができる常微分方程式は限られている．そして，一般的には，近似解を求めることで満足しなければならないことが多い．実際，19世紀末には，3つの天体の運動を記述する常微分方程式は，求積法によって解を求めることが不可能であることがわかり，解析力学の危機が訪れた．

このときにあたり，Poincaréは常微分方程式の定性的研究を提案して，この危機を救った．すなわち，“特異点や周期解がどれ位存在するか”とか，“時間を正または負の無限大にするとき，解がどのように行動するか”などの問題を考察するとき，具体的に解を求めなくとも，位相的な方法を採用することによって，十分な成果をあげることができる．具体的に解を求めること(定量的研究)に関しては，近似解で満足することにして，解の大域的な状態を位相的に(定性的に)研究しよう，ということである．この方向はBirkhoffによって継承され，位相力学という分野が生れた．

1937年Andronov-Pontrjaginは，自然現象を記述する常微分方程式は，その係数が近似的にしか定まらないことが多いということから，構造安定性という概念を提案し，重要な結果を得た．すなわち，方程式の係数の微小な変化に対して，その解の大域的な状態が位相的に変らないような方程式を構造安定

であると定義し，2次元円板上の構造安定な常微分方程式の解の大域的な状態を，適当な条件のもとで特徴づけた．

続いて，1960年以降 S. Smale は Poincaré, Birkhoff, Andronov-Pontrjagin らの仕事の上に立って，微分位相幾何学などの新しい手法を用いて，微分可能な力学系という新分野を確立した．

この分野は歴史も新しく，現在盛んに研究され，発展途上にあることもあって，入門書や専門書も少ない．特に，我が国では，成書は無い．そこで，本書は，この興味ある分野を多くの人達に理解して頂き，身近かなものとすべく，理工系学部の4年生または大学院の初年級の学生を主な対象として，微分可能な力学系の理論への入門的な解説を行うことにした．

本書は2つの部分に分かれている．第1部は，本書の主要部分である第2部への準備として，集合，位相，線型代数，ノルム空間，ノルム空間における微積分などの説明である．したがって，第2部から読み始めて，必要に応じて第1部を参照してもよい．

第2部は3つの章から成り，微分可能多様体の上の力学系の基礎的な諸概念，力学系の空間の位相，微分可能な力学系の理論の中で基本的な役割りを果たす安定多様体の理論などについて解説する．

また，附録として，微分可能な力学系の理論の現況を概観した．さらに進んでこの分野を研究しようとする方は，“あとがき”やこの附録を参考にされるとよい．

つぎに，本書を読む上の注意を2つあげることにする．第1は，本文中で前出の定理や命題を引用するときの表現法に関するものである．

(1)　異なる章の定理や命題の引用は，章・節番号をつけて引用する．

(2)　同じ章内の異なる節のものについては，節番号のみをつけて引用する．たとえば，第6章§2において，“§1 命題5”とあれば，“第6章§1 命題5”のことである．

(3)　同じ章・節内のものについては，単に定理1，命題2などとして，章・節番号は省略した．

(4)　2つ以上の定理や命題を同時に引用するとき，これらが同じ章・節にあるときは，始めのものについてだけ，上の(1), (2)の引用法を適用した．したがって，第8章§2において，"第6章§4定理1, 2"とあれば，これは"第6章§4定理1，第6章§4定理2"の意味である．

第2は，本書の末尾に索引と記号表をつけ，読者の便をはかったことである．

本書の出版にあたり，岩波書店の荒井秀男氏にいろいろお世話になった．また，池上宜弘，石本浩康の両氏から，原稿の一部について有益な御注意を頂いた．ここに記して，感謝の意を表する．

1974年7月

白岩謙一

記　号　表

目　次

第4章　ノルム空間

第5章　ノルム空間における微積分

第2部　存在定理と安定多様体の理論

第6章　存在定理

第7章　多様体と力学系

第1部　準　　備

第1部は，第2部で必要な予備知識の整理と，術語や記号についての約束のために設けたものである．ここでは，集合，位相，線型代数，ノルム空間，ノルム空間における微積分などについて，簡単な説明を行なうが，上に述べた目的から，必ずしも網羅的でなく，証明なども，ほとんど省略する．そして，重要な定理には，第1部の終りに，参考文献をあげ，その文献番号をつけることにした．特に集合，位相，線型代数は熟知のものとして，その必要な部分の術語と記号および定理などについてのみ述べることにする．

ノルム空間における微積分は，最近日本でも行なわれるようになったが，あまり普及してない．しかし，従来の微積分を，最も基本的な観点から，概念的に整理したものとして重要であるから，参考文献などを参照されて習熟されることが望ましい．

第1章　集　　合

§1　集　　合

物の集まりを**集合**という．集合を構成する物を，その**元**，**要素**，または**点**という．物 a が集合 A の元のとき，$a \in A$，または $A \ni a$ と表わし，a は A に**属する**，または A は a を**含む**という．a が A の元でないとき，$a \notin A$，または $A \not\ni a$ と表わす．

2つの集合 A, B はそれらを構成する元が同じであるとき，**等しい**といい，$A=B$ で表わす．また，この否定を $A \neq B$ で表わす．

元をまったく含まない集合を**空集合**といい，ϕ で表わす．

集合 A が $a, b, c, \cdots$ から成るとき，$A=\{a, b, c, \cdots\}$ と表わす．また，物 x に関する性質 $P(x)$ があるとき，$P(x)$ が成り立つような物 x 全体の集合を $\{x;\ P(x)\}$ で表わす．特に，集合 A の元であって $P(x)$ をみたすような元 x 全体の集合 $\{x;\ x \in A,\ P(x)\}$ を $\{x \in A;\ P(x)\}$ とも表わす．

2つの集合 A, B に対して，A または B に属する元全体の集合を，A と B の**和集合**といい，$A \cup B$ で表わす．また，A および B の両方に属する元全体の集合を，A と B の**共通部分**といい，$A \cap B$ で表わす．

$A \cap B \neq \phi$ のとき，A と B は**交わる**といい，$A \cap B=\phi$ のとき，A と B は**交わらない**という．

集合 A の元がすべて B に属するとき，A は B の**部分集合**といい，$A \subset B$，または $B \supset A$ で表わす．そして，A は B に**含まれる**，または B は A を**含む**という．

A が B の部分集合でないとき，$A \not\subset B$，または $B \not\supset A$ と表わす．

集合 E の部分集合全体の集まりを E の**ベキ集合**といい，$\mathcal{P}(E)$で表わす．$\mathcal{P}(E)=\{A;\ A\subset E\}$ である．

集合 Λ の各元 λ にたいして(E の部分)集合 A_λ が定まっているとき，$\{A_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$ を Λ を**添数集合**とする(E の部分)**集合族**という．これを $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とも表わす．

集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，どれかの $A_\lambda, \lambda\in\Lambda$ に属するような元全体の集合を $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，または $\bigcup_{\lambda}A_\lambda$ と書き，これを $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**和集合**という．また，すべての $A_\lambda, \lambda\in\Lambda$ に属するような元全体の集合を $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，または $\bigcap_{\lambda}A_\lambda$ と書き，$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**共通部分**という．

$\Lambda=\{1,\cdots,n\}$ のとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を $A_1\cup\cdots\cup A_n$，または $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を $A_1\cap\cdots\cap A_n$，または $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ と書く．$\Lambda=\{1,\cdots,n,\cdots\}$ のとき，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を $A_1\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，または $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を $A_1\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$，または $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$ などと表わす．

$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が E の部分集合族で，$\Lambda=\phi$ のとき，$\bigcup_{\lambda\in\phi}A_\lambda=\phi$，$\bigcap_{\lambda\in\phi}A_\lambda=E$ である．

2つの集合 A, B に対して，A の元であって B に属さないような元全体の集合を $A-B$ で表わし，A と B の**差集合**という．$A-B=\{x\in A;\ x\notin B\}$ である．

集合 E を固定して，その部分集合だけを考えるとき，E の部分集合 A に対して，$A^c=E-A$ を A の(E における)**補集合**という．

例 (**de Morgan の法則**) $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を E の部分集合族とすると

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda{}^c,\qquad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda{}^c$$

が成立する．

2つの集合 A, B が与えられたとき，A の元 a と B の元 b の対 (a,b) 全体の集合を A と B の**直積**といい，$A\times B$ で表わす．すなわち，$A\times B=\{(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}$ である．

一般に，n 個の集合 $A_1,\cdots,A_n$ があるとき，$a_1\in A_1$，$\cdots$，$a_n\in A_n$ の組$(a_1,\cdots,a_n)$全体の集合を $A_1,\cdots,A_n$ の**直積**といい，$A_1\times\cdots\times A_n$ または $\prod_{i=1}^{n}A_i$ で表わす．

$A_1=\cdots=A_n=A$ のとき $A_1\times\cdots\times A_n$ を A^n と書く.

$a=(a_1,\cdots,a_n)\in A_1\times\cdots\times A_n$ に対して, $a_i\in A_i$ を a の**第 i 座標**または**第 i 成分**という.

§2 写 像

A, B を集合とする. A の元に対して, ある一定の規則 f によって, B の元を定めるとき, これを A から B への**写像**, **対応**, または**関数**などという. そして $f: A\to B$, または $A\xrightarrow{f}B$ と表わす. f によって $a\in A$ に対応する元 $b\in B$ を $b=f(a)$ と書き, f による $a\in A$ の**像**, または**値**という.

2つの写像 $f, g: A\to B$ は, A の各元 a における値が一致するとき**等しい**といい, $f=g$ で表わす. この否定は $f\neq g$ である.

写像 $f: A\to B$ に対して, $A\times B$ の部分集合 $\{(a, f(a))\,;\ a\in A\}$ を f の**グラフ**という.

写像 $f: A\to B$ があたえられたとき, A の部分集合 A' に対して, $f(A')=\{f(a')\,;\ a'\in A'\}$ を f による A' の**像**という. 特に, $f(A)$ を f の**値域**という. また A を f の**定義域**という.

f の値域 $f(A)$ が B の1点からなる集合のとき, f を**定値写像**という.

写像 $f: A\to B$ と B の部分集合 B' に対して, $f^{-1}(B')=\{a\in A\,;\ f(a)\in B'\}$ を f による B' の**逆像**, または**原像**という. $B'=\{b\}$ のとき, $f^{-1}(\{b\})$ の代りに $f^{-1}(b)$ とも書く.

例 写像 $f: A\to B$ に対して, つぎの公式が成立する.

(1) $A'\subset A$ とすると $A'\subset f^{-1}(f(A'))$.

(2) $B'\subset B$ とすると $f(f^{-1}(B'))=B'\cap f(A)$.

(3) $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の部分集合族とすると

$$f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda),\qquad f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda)$$

(4) $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を B の部分集合族とすると

$$f^{-1}\Bigl(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\Bigr)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda),\qquad f^{-1}\Bigl(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda\Bigr)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(B_\lambda)$$

集合 A に対して，$1_A: A\to A$ を $1_A(a)=a$, $a\in A$ によって定まる写像とする．これを A の**恒等写像**という．1_A の代りに単に 1 とも書く．

集合 A が B の部分集合のとき，$i: A\to B$ を $i(a)=a$, $a\in A$ で定まる写像とする．これを A から B への**包含写像**といい，$i: A\subset B$ とも書く．

2つの写像 $f: A\to B$, $g: B\to C$ にたいして，その**合成写像** $g\circ f: A\to C$ を $(g\circ f)(a)=g(f(a))$, $a\in A$ で定義する．これを $g\cdot f$, または gf と略記することもある．

例　任意の写像 $f: A\to B$ に対して

$$f\circ 1_A=f,\qquad 1_B\circ f=f$$

が成立する．

また，写像 $f: A\to B$, $g: B\to C$, $h: C\to D$ に対して

(結合法則)　$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

が成立する．

写像 $f: A\to B$ がある．いま A' を A の部分集合として，f を A' の上で考えたものを，f の A' への**制限**といい，$f|A': A'\to B$ であらわす，$(f|A')(a')=f(a')$, $a'\in A'$ であって，$i: A'\subset A$ とすると，$f|A'=f\circ i$ となる．

写像 $f': A'\to B$ に対して，$f|A'=f'$ となるような写像 $f: A\to B$ を f' の A への**拡張**という．

写像 $f: A\to B$ に対して，$f(A)=B$ となるとき，f は**全射**という．また A の相異なる2つの元の f による像が異なるとき，f は**単射**という．全射かつ単射のとき，**全単射**という．

$f: A\to B$ が全単射のとき，B の各元 b に対して，$f(a)=b$ となる元 $a\in A$ がただ1つ定まる．$b\in B$ に対して，このような $a\in A$ を対応させる写像を $f^{-1}: B\to A$ で表わし，f の**逆写像**という．

例　(1) 恒等写像は全単射である．

(2) $f:A\to B$ が全単射なら，その逆写像 $f^{-1}:B\to A$ も全単射で $(f^{-1})^{-1}=f$ となる．

(3) $f:A\to B,\ g:B\to C$ が全単射なら，$g\circ f:A\to C$ も全単射で $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ となる．

2つの集合 A, B の間に全単射 $f:A\to B$ が存在するとき，A と B は**対等**，または**同じ濃度をもつ**という．

有限個の元からなる集合を**有限集合**，そうでないとき**無限集合**という．自然数全体の集合と対等な集合を**可算集合**という．有限，または可算な集合を**たかだか可算**という．

n 個の集合 $A_1, \cdots, A_n$ の直積 $A_1\times\cdots\times A_n$ の元 $a=(a_1, \cdots, a_n)$，$a_1\in A_1, \cdots, a_n\in A_n$ に対して，その第 i 成分 $a_i\in A_i$ を対応させる写像を $p_i: A_1\times\cdots\times A_n\to A_i$, $(i=1, \cdots, n)$ と書き，これを**第 i 成分への射影**という．

n 個の写像 $f_i: A_i\to B_i$, $(i=1, \cdots, n)$ に対して，写像 $f_1\times\cdots\times f_n: A_1\times\cdots\times A_n\to B_1\times\cdots\times B_n$ を $(f_1\times\cdots\times f_n)(a_1, \cdots, a_n)=(f_1(a_1), \cdots, f_n(a_n))$，$(a_1, \cdots, a_n)\in A_1\times\cdots\times A_n$ と定める．これを写像 $f_1, \cdots, f_n$ の**直積**という．

また n 個の写像 $f_i: A\to B_i$, $(i=1, \cdots, n)$ にたいして，写像 $(f_1, \cdots, f_n): A\to B_1\times\cdots\times B_n$ を $(f_1, \cdots, f_n)(a)=(f_1(a), \cdots, f_n(a))$，$a\in A$ と定義し，これを $f_1, \cdots, f_n$ の**組**という．$p_i: B_1\times\cdots\times B_n\to B_i$, $(i=1, \cdots, n)$ を第 i 成分への射影とするとき，任意の写像 $f: A\to B_1\times\cdots\times B_n$ に対して，$f_i=p_i\circ f: A\to B_i$ とおくと，$f=(f_1, \cdots, f_n)$ となる．

集合 A, B に対して，A から B への写像全体の集合を B^A で表わす．すなわち $B^A=\{f;\ f: A\to B\}$ である．これを A から B への**写像空間**という．

集合 E の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，E^Λ の部分集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ を次のように定義する．$\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{f;\ f:\Lambda\to E,\ f(\lambda)\in A_\lambda, (\lambda\in\Lambda)\}$．そしてこれを $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積**という．$a_\lambda=f(\lambda)\in A_\lambda$，$\lambda\in\Lambda$ とおき，f の代りに $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ と書くことにすると

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda};\ a_\lambda\in A_\lambda, (\lambda\in\Lambda)\}$$

となる．

$\Lambda=\{1,\cdots,n\}$ のとき $\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ は $\prod_{\lambda=1}^{n}A_\lambda$ と同一視することができる．$\Lambda=\{1,\cdots,n,\cdots\}$ のとき，これを $\prod_{i=1}^{\infty}A_i$ とも書く．

§3 同値関係

集合 E の2元の対 (a,b)，$a,b\in E$ に関する命題を E の**2元関係**という．いま集合 E の2元関係を1つ固定し，対 (a,b) に対して，この2元関係が成立するとき，$a\sim b$，そうでないとき $a\not\sim b$ と表わす．そして，この2元関係 $\sim$ が，つぎの3つの性質をみたすとき，これを E の**同値関係**という．

(1)　$a\sim a$　　**(反射律)**

(2)　$a\sim b$　ならば　$b\sim a$　　**(対称律)**

(3)　$a\sim b,\ b\sim c$　ならば　$a\sim c$　　**(推移律)**

そして，$a\sim b$ のとき，a は b と**同値**という．

E の同値関係 $\sim$ が与えられたとき，a と同値な E の元全体の集合を $[a]$ で表わし，これを a の**同値類**という．これは E の部分集合であるが，つぎの(4)，(5)の性質が成立する．

(4)　$[a]\ni a,\quad a\in E$

(5)　$a,b\in E$ に対して，$[a]=[b]$ か $[a]\cap[b]=\phi$ のどちらか一方が成り立つ．

ある同値類 C に対して，$a\in C$ となる a を C の**代表元**という．(5)から，a が C の代表元なら $[a]=C$ となる．

集合 E の部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，つぎの3つの性質(6)，(7)，(8)が成立するとき，これを E の**類別**，または**直和分割**という．

(6)　$A_\lambda\neq\phi,\quad \lambda\in\Lambda$

(7)　$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=E$

(8)　$\lambda\neq\lambda'$　ならば　$A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\phi$

E の同値関係 $\sim$ が与えられたとき，その同値類全体でつくられる E の部分

集合族は，上の(4)，(5)から，E の直和分割となる．また逆に，E の直和分割 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき，$E\ni a,b$ に対して，適当な $\lambda\in\Lambda$ があって，$a,b\in A_\lambda$ が成立するとき $a\sim b$ と定義すると，これは E の同値関係となり，その同値類は $A_\lambda, \lambda\in\Lambda$ となる．

E の同値関係 $\sim$ による同値類全体の集合を $E/\sim$ で表わし，これを E の(同値関係 $\sim$ による)**商集合**という．そして $p(a)=[a]$，$a\in E$ によって定義される写像 $p: E\to E/\sim$ を**射影**という．これは明らかに全射である．

§4 順 序

集合 A の2元関係がある．対(a,b)，$a,b\in A$ に対して，この2元関係が成立するとき，$a\leq b$ または $b\geq a$ と表わす．この関係が，つぎの3つの条件をみたすとき，これを A の**順序**という．

(1) $a\leq a$

(2) $a\leq b,\ b\leq a$ ならば $a=b$

(3) $a\leq b,\ b\leq c$ ならば $a\leq c$

集合 A に順序 $\leq$ をつけて考えるとき，これを**順序集合**という．$a\leq b$ でかつ $a\neq b$ のとき，$a<b$，または $b>a$ と書く．

一般に，順序集合において $a\leq b$ の否定は $a>b$ とは限らない．たとえば，集合 E のベキ集合 $\mathcal{P}(E)$ に順序をつぎのように入れて順序集合とする．

$$A, B\in\mathcal{P}(E) \quad \text{に対して} \quad A\subset B \rightleftarrows A\leq B$$

$A\leq B$ の否定は $A\not\subset B$ ということであって，$A>B$ すなわち“$A\supset B$ かつ $A\neq B$”とは異なる．

順序集合 A の任意の2元 a,b が比較可能のとき，すなわち $a\leq b$ または $b\leq a$ のどちらかが成り立つとき，これを**全順序集合**という．

順序集合 A の部分集合 B に対して，b_0 が B の**最大元**とは，$b_0\in B$ であって，任意の $b\in B$ に対して $b\leq b_0$ が成り立つときをいう．このとき $b_0=\max B$

で表わす．最大元は存在すれば，ただ1つに限る．**最小元**についても同様に定義し，B の最小元を $\min B$ で表わす．

つぎに，c_0 が B の**極大元**とは，$c_0 \in B$ であって，かつ B には $b>c_0$ となるような元 b が存在しないときをいう．**極小元**についても同様に定義する．

c が B の**上界**とは，B の任意の元 b に対して，$b \leq c$ が成立するときをいう．B に上界が存在するとき，B は**上に有界**という．**下界，下に有界**も同様に定義する．

B の上界全体の集合に最小元が存在するとき，これを B の**上限**といい，$\sup B$ で表わす．また B の下界全体の集合の最大元を**下限**といい，$\inf B$ で表わす．

選択公理　空でない集合 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$ の集まり $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \phi$ が成立する．

われわれはこの選択公理を仮定する．これはつぎの Zorn の補題と同値であることが知られている．

順序集合 A の空でない部分集合で，A の順序に関して全順序集合となるものが，必ず上限をもつとき，A は**帰納的**という．

Zorn の補題　順序集合 A が帰納的なら，A には少なくとも1つ極大元が存在する．([6], [8])

第2章　位　　相

§1　距離空間(I)

集合 X の 2 元 x, y に対して実数 $d(x, y)$ が定まり，つぎの条件をみたすとき，d を**距離(関数)**という．

(1)　$d(x, y) \geqq 0$ で $d(x, y) = 0 \rightleftarrows x = y$

(2)　$d(x, y) = d(y, x)$　　**(対称性)**

(3)　$d(x, y) + d(y, z) \geqq d(x, z)$　　**(三角不等式)**

ここで $x, y, z \in X$ である．

X にその距離関数 d をつけて考えるとき，これを**距離空間**という．

実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ とおく，$\boldsymbol{R} \ni x, y$ に対して，$d(x, y) = |x-y|$ とおくと，これは $\boldsymbol{R}$ の距離関数となる．

$\boldsymbol{R}$ の n 個の直積 $\boldsymbol{R}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n)\ ;\ x_i \in \boldsymbol{R}, (i=1, \cdots, n)\}$ において，$x = (x_1, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

とおくと，これは $\boldsymbol{R}^n$ の距離となる．これを **n 次元 Euclid 空間**という．

$\boldsymbol{R}^1 = \boldsymbol{R}$ と同一視できる．

距離空間の部分集合は，自然に，距離空間と考えられる．

2 つの距離空間 X_1, X_2 が与えられ，その距離関数を d_1, d_2 とする．このとき，直積 $X = X_1 \times X_2$ に距離関数 d を，つぎの式で定義することができる．

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2},$$
$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$$

この距離空間 $X=X_1\times X_2$ を**直積距離空間**という.

X を距離空間, d をその距離とする. X の点 x_0 と正数 r に対し, X の部分集合, $B_r(x_0)=\{x\in X;\ d(x,x_0)<r\}$ を x_0 を**中心**とする**半径** r の X の**開球**という. また $\bar{B}_r(x_0)=\{x\in X;\ d(x,x_0)\leqq r\}$ を x_0 を**中心**とする**半径** r の X の**閉球**という.

X の部分集合 A の各点 x に対して, 適当な正数 r があって, $B_r(x)\subset A$ となるとき, A を**開集合**という. 開集合の補集合を**閉集合**という.

開球は開集合であり, 閉球は閉集合である. また定義から, 閉集合の補集合は開集合である.

X の点列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ を簡略にして $\{x_n\}$ と書く. 点列 $\{x_n\}$ が点 $p\in X$ に**収束する**とは $\lim_{n\to\infty} d(x_n, p)=0$ となることである. そして, このとき $\lim_{n\to\infty} x_n=p$, または $n\to\infty$ のとき $x_n\to p$ と表わす.

距離空間 X, Y の間の写像 $f: X\to Y$ が点 $p\in X$ **で連続**とは, p に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(p)$ が成立するときをいう. f が X の各点で連続のとき, 単に**連続**という.

写像 $f: X\to Y$ に対して, 点 x が $p\in X$ に近づくときの $f(x)$ の**極限**が $q\in Y$ であるとは, 任意の正数 ε に対して適当な正数 δ があって, $0<d(x,p)<\delta$ なら $d(f(x),q)<\varepsilon$ となるときをいう. そして, これを $\lim_{x\to p} f(x)=q$, または $x\to p$ のとき $f(x)\to q$ と表わす.

命題 1　写像 $f: X\to Y$ に関して, つぎの 3 つの条件は同値である.

(1)　f は点 p で連続,

(2)　$\lim_{x\to p} f(x)=f(p)$,

(3)　任意の正数 ε に対して, 適当な正数 δ があって, $d(x,p)<\delta$ ならば $d(f(x), f(p))<\varepsilon$.

距離空間 X の 2 つの部分集合 A, B に対して,

$$d(A,B)=\inf\{d(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}$$

とおく. そしてこれを A と B の**距離**という. 特に, A が 1 点 a からなるとき, $d(a,B)$ と表わす.

命題 2 (1) $d: X\times X\to \boldsymbol{R}$ を $d(x,y)$, $(x,y)\in X\times X$ によって定義される写像とすると，これは連続である．

(2) $B\subset X$ を固定して，$d(\cdot,B): X\to \boldsymbol{R}$ を $d(\cdot,B)(x)=d(x,B)$ と定義すると，これは連続である．

(3) $d(x,B)=0$ となるための必要十分条件は，B の適当な点列 $\{b_n\}$ があって $\lim_{n\to\infty} b_n = x$ となることである．

§2 位相空間

集合 E の部分集合族 $\mathcal{O}$ がつぎの3つの条件をみたすとき，これを E の**位相**，または**位相構造**という．

(1) $\phi\in\mathcal{O}$, $\quad E\in\mathcal{O}$

(2) $O_1, O_2\in\mathcal{O} \longrightarrow O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$

(3) $O_\lambda\in\mathcal{O}$, $\lambda\in\Lambda$(Λ は任意の集合) $\longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\in\mathcal{O}$

集合 E にその位相 $\mathcal{O}$ をつけて考えるとき，これを**位相空間**という．この位相空間でその位相 $\mathcal{O}$ に属する部分集合をその**開集合**といい，開集合の補集合を**閉集合**という．したがって，閉集合の補集合は開集合である．

de Morgan の法則から，つぎの命題が成り立つ．

命題 1 位相空間 E の閉集合全体の集合を $\mathcal{F}$ とすると，つぎの3つの性質が成立する．

(1) $E\in\mathcal{F}$, $\quad \phi\in\mathcal{F}$

(2) $F_1, F_2\in\mathcal{F} \longrightarrow F_1\cup F_2\in\mathcal{F}$

(3) $F_\lambda\in\mathcal{F}$, $\lambda\in\Lambda \longrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda\in\mathcal{F}$

また距離空間において，つぎの重要な命題が成立する．

命題 2 距離空間 X の開集合(§1で定義したもの)全体の集合を $\mathcal{O}$ とすると，これは X の位相である．

この命題によって，距離空間は自然に位相空間となる．今後，距離空間は，

この位相で位相空間と考えることにする．

集合 E に対して，そのベキ集合 $\mathcal{P}(E)$ は E の位相である．この位相を**離散位相**という．そして離散位相をもつ空間を**離散(位相)空間**という．

位相空間 E の点 x に対して，E の部分集合 V が x の**近傍**とは，適当な E の開集合 O があって，$x\in O\subset V$ となるときをいう．したがって，x の近傍はつねに x を含む．また x を含む開集合は x の近傍である．これを x の**開近傍**という．

命題 3 位相空間 E の部分集合 A がその開集合となるための必要十分条件は，A の任意の点 x に対して，A が x の近傍となることである．

位相空間 E の相異なる 2 点 x, y に対して，それぞれの適当な近傍 U, V があって $U\cap V=\phi$ となるとき，E を **Hausdorff 空間**という．

距離空間は Hausdorff 空間である．

位相空間 E の部分集合 A が与えられたとき，$x\in E$ が A の**内点**とは，A が x の近傍となるときをいう．A の補集合 A^c が x の近傍となるとき，x を A の**外点**という．また x が A の内点でも外点でもないとき，x を A の**境界点**という．

A の内点全体の集合を A の**内部**といい，$\mathrm{Int}\,A$ で表わす．また A の外点全体の集合を A の**外部**といい，$\mathrm{Ext}\,A$ で表わす．A の境界点全体の集合を A の**境界**といい，$\mathrm{Bd}\,A$ で表わす．

定理 1 (1) $\mathrm{Int}\,A$ は A に含まれる最大の開集合である．すなわち，$\mathrm{Int}\,A$ は A に含まれる開集合で，O を A に含まれる任意の開集合とすると，$O\subset \mathrm{Int}\,A$ となる．

したがって，A が開集合となるための必要十分条件は，$A=\mathrm{Int}\,A$ となることである．

(2) $\mathrm{Ext}\,A=\mathrm{Int}(A^c)$

(3) $\{\mathrm{Int}\,A, \mathrm{Ext}\,A, \mathrm{Bd}\,A\}$ は E の直和分割である．

(4) $x\in \mathrm{Bd}\,A$ となるための必要十分条件は，x の任意の近傍 V に対して $V\cap A\neq\phi$，$V\cap A^c\neq\phi$ となることである．

位相空間 E の部分集合 A に対して，$x \in E$ が A の**触点**とは，x の任意の近傍 V が A と交わるときをいう．A の触点全体の集合を $\bar{A}$，または $\mathrm{Cl}\,A$ で表わし，A の**閉包**という．

定理 2　(1)　A の閉包 $\bar{A}$ は A を含む最小の閉集合である．すなわち，$\bar{A}$ は A を含む閉集合で，A を含む任意の閉集合 F に対して $F \supset \bar{A}$ となる．

したがって，A が閉集合となるための必要十分条件は，$A=\bar{A}$ となることである．

(2)　$\bar{A} = \mathrm{Int}\,A \cup \mathrm{Bd}\,A = (\mathrm{Ext}\,A)^c$

命題 4　X を距離空間，A をその部分集合とする．このとき，つぎのことが成立する．

(1)　$p \in \bar{A}$ となるための必要十分条件は，適当な A の点列 $\{a_n\}$，$a_n \in A$ があって $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ となることである．

(2)　A が閉集合となるための必要十分条件は，A に含まれる任意の収束点列 $\{a_n\}$，$a_n \in A$ に対して，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が A に含まれることである．

位相空間 E の2つの部分集合 A, B に対して $\bar{A} \supset B$ が成立するとき，A は **B で稠密**という．A が E で稠密，すなわち $\bar{A}=E$ となるとき，単に A は**稠密**という．

§3　連続写像

E, F を位相空間とする．写像 $f: E \to F$ が $x_0 \in E$ **で連続**とは，$f(x_0)$ の任意の近傍 V に対して，その f による逆像 $f^{-1}(V)$ が x_0 の近傍となるときをいう．f が E の各点で連続のとき，単に**連続**という．

命題 1　距離空間 X, Y の間の写像 $f: X \to Y$ が $x_0 \in X$ で連続ということは，X, Y を位相空間と考えたときの連続性の定義と一致する．

定理 1　位相空間 E, F の間の写像 $f: E \to F$ に対して，つぎの4つの条件は同値である．

(1)　f は連続.

(2)　F の任意の開集合 A に対して，その f による逆像 $f^{-1}(A)$ は E の開集合である.

(3)　F の任意の閉集合 B に対して，その f による逆像 $f^{-1}(B)$ は E の閉集合である.

(4)　E の任意の集合 C に対して，$f(\bar{C})\subset\overline{f(C)}$ が成立する.

命題 2　(1)　恒等写像 $1_E: E\to E$ は連続である.

(2)　$f: E\to F$, $g: F\to G$ が位相空間の間の連続写像なら，その合成写像 $g\circ f: E\to G$ は連続である.

写像 $f: E\to F$ が全単射で，f およびその逆写像 f^{-1} がともに連続のとき，f を**同相写像**という．また，適当な同相写像 $f: E\to F$ が存在するような 2 つの位相空間 E, F は互いに**同相**という.

命題 3　(1)　恒等写像 $1_E: E\to E$ は同相写像である.

(2)　$f: E\to F$ が同相写像なら，その逆写像 $f^{-1}: F\to E$ も同相写像である.

(3)　$f: E\to F$, $g: F\to G$ が同相写像なら，$g\circ f: E\to G$ も同相写像である.

系　位相空間の間の同相という関係は，同値関係である.

§4　位相の生成

E を位相空間，$\mathcal{O}$ をその位相，$\mathcal{B}\subset\mathcal{O}$ とする．E の開集合，すなわち $\mathcal{O}$ に属する E の部分集合は，必らず，$\mathcal{B}$ に属する E の開集合の和集合として表わされるとき，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の**基底**という．ここで空集合 ϕ は $\mathcal{B}$ の 0 個の元の和集合と考えることにする.

基底 $\mathcal{B}$ を適当にとって，$\mathcal{B}$ が可算集合にできるとき，E は**第 2 可算公理**をみたすという.

位相空間 E が稠密な可算部分集合を含むとき，E を**可分**という．すると，つぎの定理が成立する.

定理 1　X を距離空間とする．このとき，X が第2可算公理をみたすための必要十分条件は，X が可分であることである．

E を位相空間，$\mathcal{O}$ をその位相，$\mathcal{B}'\subset\mathcal{O}$ とする．$\mathcal{B}'$ の有限個の元の共通部分として表わされる E の部分集合全体の集合を $\mathcal{B}$ とする．ここで，E は $\mathcal{B}'$ の 0 個の元の共通部分として $\mathcal{B}$ に入れることにする．さて，このとき $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の基底になるなら，$\mathcal{B}'$ を $\mathcal{O}$ の**準基**という．

一般に集合 E の部分集合族 $\mathcal{B}'$ が与えられたとき，$\mathcal{B}'$ に属する E の有限個の部分集合の共通部分として表わされるような E の部分集合全体の集合を $\mathcal{B}$ とし，$\mathcal{B}$ の任意個の元の和集合として表わされるような E の部分集合全体の集合を $\mathcal{O}$ とすると，$\mathcal{O}$ は E の位相となる．そして，この位相に関して，$\mathcal{B}$ はその基底，$\mathcal{B}'$ は準基となる．この位相 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{B}'$ の**生成する位相**という．

E を位相空間，$\mathcal{O}$ をその位相とする．E の部分集合 E' に対して，$\mathcal{O}|E'=\{O\cap E';\ O\in\mathcal{O}\}$ とおくと，これは E' の位相となる．これを E' の**相対位相**といい，この位相で E' を位相空間と考えたとき，E' を E の**部分空間**という．

2つの位相空間 E,F の間の写像 $f:E\to F$ が E から F の部分空間 $f(E)$ の上への同相写像となるとき，f を**うめこみ**という．

E,E' を位相空間，$\mathcal{O},\mathcal{O}'$ をその位相とする．このとき，$E\times E'$ の部分集合族 $\mathcal{O}\times\mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}\times\mathcal{O}'=\{O\times O';\ O\in\mathcal{O},\ O'\in\mathcal{O}'\}$ と定義して，これで生成される $E\times E'$ の位相を，その**直積位相**という．そして，この位相空間 $E\times E'$ を E,E' の**直積空間**という．

$p:E\times E'\to E,\ p':E\times E'\to E'$ を各成分への射影とすると，これらは連続である．

一般に，位相空間 E,F の間の写像 $f:E\to F$ に対して，E の開(閉)集合の f による像が，つねに F の開(閉)集合となるとき，f を**開(閉)写像**という．

上の各成分への射影 p,p' は開写像である．

距離空間 X,Y の直積距離空間の自然な位相は，X,Y の自然な位相の直積位相と一致する．

位相空間の集まり $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とその位相 $\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がある．このとき，直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$

の部分集合族 $\mathscr{A}$ を $\mathscr{A}=\{\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda;\ A_\lambda\subset E_\lambda,\ A_\lambda\in\mathscr{O}_\lambda,(\lambda\in\Lambda)$, A_λ は有限個の λ を除いて E_λ と一致する$\}$ とおき，これで生成される位相を $\prod_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ の**直積位相**という．そしてこの空間を**直積空間**という．これは初めに与えた直積空間の定義の任意個の場合への拡張である．

E を位相空間，$\mathscr{O}$ をその位相とする．E から集合 F への全射 $p:E\to F$ が与えられたとき，F の部分集合族 $\mathscr{O}'$ を $\mathscr{O}'=\{O';\ O'\subset F,\ p^{-1}(O')\in\mathscr{O}\}$ と定める．すると $\mathscr{O}'$ は F の位相となる．これを**商位相**といい，この位相空間を**商空間**という．この商位相で，$p:E\to F$ は連続である．

§5 連 結 性

位相空間 E が，2つの開集合によって直和分割されることは決してないとき，E を**連結**という．すなわち，E の2つの空でない開集合 O_1,O_2 があって $E=O_1\cup O_2$, $O_1\cap O_2=\phi$ となるようなことは決してないとき，E は連結である．E の**部分集合** A **が連結**とは，相対位相で考えて A が連結のときである．

命題 1 つぎの3つの条件は同値である．

(1) E は連結．

(2) E は2つの閉集合によって直和分割されることは決してない．

(3) E の閉集合かつ開集合となるような部分集合は，E と ϕ に限る．

定理 1 E,F を位相空間，$f:E\to F$ を連続写像とする．いま E が連結なら $f(E)$ も連結である．

定理 2 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間 E の部分集合族とする．いま各 $E_\lambda,\lambda\in\Lambda$ が連結で，任意の $\lambda,\lambda'\in\Lambda$ に対して $E_\lambda\cap E_{\lambda'}\neq\phi$ とすると，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}E_\lambda$ は連結である．

定理 3 A を位相空間 E の連結な部分集合とする．いま $A\subset B\subset\bar{A}$ とすると B は連結である．特に，$\bar{A}$ は連結である．

位相空間 E の2点 x,y に対して，これらを含む E の連結な部分集合 A が存在するとき，$x\sim y$ とおく．すると，定理2からこれは同値関係となる．こ

の同値類を E の**連結成分**，または**成分**という．これは定理3から閉集合となる．さらに点 x を含む成分は x を含む最大の連結集合であることもわかる．

E の連結成分がすべてただ1つの点からなるとき，E は**完全不連結**という．

実数空間 $\boldsymbol{R}$ の部分集合で連結なものは，1点だけからなる集合，および有限または無限の区間である．

実数の区間 J から位相空間 E への連続写像 $f: J \to E$ を E の**(連続)曲線**という．$J=[a,b]$, $(a<b)$ のとき，$f(a) \in E$ をその**始点**，$f(b) \in E$ をその**終点**，f を $f(a)$ **と** $f(b)$ **を結ぶ曲線**という．$f(a)=f(b)$ のとき，これを**閉曲線**という．定理1から曲線 $f: J \to E$ の像 $f(J)$ は E の連結な部分集合である．

E の任意の2点が曲線で結べるとき，E を**弧状連結**という．定理2から，弧状連結な空間は連結である．しかし，この逆は一般に成立しない．

命題 2　n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の開集合に対して，これが弧状連結となるための必要十分条件はこれが連結となることである．

一般に $\boldsymbol{R}^n$ の連結な開集合を**領域**という．

§6　コンパクト性

位相空間 E の部分集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が E に等しいとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は E **を覆う**，または $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は E の**被覆**であるという．さらに各 U_λ が開集合のとき，$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を E の**開被覆**という．

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を E の被覆とする．いま適当な $\Lambda_1 \subset \Lambda$ があって $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_1}$ が E の被覆となるとき，これを $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**部分被覆**という．特に Λ_1 が有限のとき，**有限部分被覆**という．

位相空間 E の任意の開被覆に対して，有限部分被覆が存在するとき，E を**コンパクト**という．また E の部分集合 A がその相対位相でコンパクトのとき，これを**コンパクトな部分集合**という．

E の部分集合族 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が**有限交叉性**をもつとは，任意の有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

$\in \Lambda$ に対して $\bigcap_{i=1}^{n} E_{\lambda_i} \neq \phi$ となるときをいう.

命題 1 E がコンパクトとなるための必要十分条件は, 有限交叉性をもつ任意の部分集合族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{E}_\lambda \neq \phi$ が成立することである.

定理 1 $f: E \to F$ を位相空間 E, F の間の連続写像, E をコンパクトとする. すると $f(E)$ もコンパクトである.

定理 2 E をコンパクト位相空間, A をその閉集合とする. すると A はコンパクトとなる.

定理 3 E を Hausdorff 空間, A をそのコンパクト部分集合とする. すると A は E の閉集合となる.

系 1 連続写像 $f: E \to F$ がある. いま E がコンパクト, F が Hausdorff 空間とすると, f は閉写像, すなわち, E の閉集合の f による像は F の閉集合である.

系 2 E をコンパクト位相空間, F を Hausdorff 空間とする. いま $f: E \to F$ が連続な全単射とすると, f^{-1} は連続, したがって f は同相写像となる.

定理 4 **(Tychonoff)** $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクト位相空間の集まりとする. すると, その直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ はコンパクトである.

この定理が選択公理と同値であることは知られている. また, この定理の逆が成立することは, 定理 1 を各成分への射影に適用することによってわかる.

位相空間 E の各点に対して, コンパクトな近傍が存在するとき, E を**局所コンパクト**という.

定理 5 E を局所コンパクトな Hausdorff 空間とする. このとき, 一点 ∞ をつけ加えて $E' = E \cup \{\infty\}$ を作り, E' に適当な位相を入れて, つぎの 2 つの条件をみたすようにできる.

(1) E' はコンパクト Hausdorff 空間である.

(2) 包含写像 $i: E \subset E'$ はうめ込みである. すなわち, E の相対位相は, 初めに与えられた位相と一致する.

このような E' は E に対して(同相を除いて)ただ 1 つ存在する.

上の E' を E の **1 点コンパクト化**という. たとえば, n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$

の1点コンパクト化は，n 次元球面 $S^n=\{x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in \boldsymbol{R}^{n+1};\ {x_1}^2+\cdots+{x_{n+1}}^2=1\}$ である．

定理 6 距離空間 X がコンパクトになるための必要十分条件は，つぎの条件(＊)が成り立つことである．

(＊) X の任意の点列 $\{x_n\}$ は収束する部分列をもつ．

定理 7 n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合がコンパクトになるための必要十分条件は，これが有界閉集合となることである．

ここで距離空間の部分集合が**有界**とは，これが適当な半径の開(閉)球に含まれるときをいう．

定理 8 コンパクト位相空間の上で定義された実数値連続関数 $f: E\to \boldsymbol{R}$ は，最大値および最小値をもつ．すなわち，適当な2点 $x_0, x_1\in E$ があって $f(x_0)\leqq f(x)\leqq f(x_1)$，$x\in E$ が成立する．

距離空間 X, Y の間の写像 $f: X\to Y$ がつぎの条件(＊)をみたすとき，これを**一様連続**という．

(＊) 任意の正数 ε に対して適当な正数 δ が存在して $d(x,x')<\delta$ なら $d'(f(x),f(x'))<\varepsilon$ となる．ただし，ここで d, d' はそれぞれ X, Y の距離とする．

一般に，一様連続なら連続となる．しかし，この逆は成り立たない．

定理 9 X, Y が距離空間，$f: X\to Y$ は連続写像とする．いま X がコンパクトなら，f は一様連続である．

§7 正規空間とパラコンパクト空間

つぎの条件(＊)をみたす Hausdorff 空間 E を**正規空間**という．

(＊) F_1, F_2 を E の閉集合で $F_1\cap F_2=\phi$ となるものとする．このとき，F_i を含む開集合 O_i, $(i=1,2)$ を適当にとると $O_1\cap O_2=\phi$ とできる．

定理 1 コンパクト Hausdorff 空間は正規空間である．

定理 2 距離空間は正規空間である.

定理 3 E を正規空間, F_1, F_2 を互いに交わらない E の閉集合とする. するとつぎの2つの条件をみたす実数値連続関数 $f: E \to \boldsymbol{R}$ が存在する.

(1) $0 \leqq f(x) \leqq 1, \quad x \in E$

(2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in F_1 \\ 1, & x \in F_2 \end{cases}$

定理 4 E を正規空間, A をその閉集合とする. すると, A 上の任意の実数値連続関数 $f: A \to \boldsymbol{R}$ は, E 上の実数値連続関数 $g: E \to \boldsymbol{R}$ に拡張される. 特に, $a \leqq f(x) \leqq b$, $x \in A$, なら $a \leqq g(x) \leqq b$, $x \in E$ とできる. ([2])

定理 5 第2可算公理をみたす正規空間は, 適当な距離関数を定めて, その自然な位相がもとの位相と一致するようにできる. ([7], [8])

位相空間 E の2つの被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{V} = \{V_\mu\}_{\mu \in M}$ がある. いま, 任意の $U_\lambda \in \mathcal{U}$ に対して適当な $V_\mu \in \mathcal{V}$ があって $U_\lambda \subset V_\mu$ となるとき, $\mathcal{U}$ は $\mathcal{V}$ の**細分**という.

E の部分集合族 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ がある. E の各点 x に対し, その適当な近傍 V をとると $E_\lambda \cap V \neq \phi$ となるような E_λ は有限個となるとき, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は**局所有限**であるという.

Hausdorff 空間がある. いま, この任意の開被覆に対して, 局所有限な開被覆でその細分となるようなものが存在するとき, この空間を**パラコンパクト**という.

定理 6 距離空間はパラコンパクトである. ([2])

定理 7 パラコンパクト空間は正規空間である. ([2])

位相空間 E 上の連続関数族 $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が, つぎの3つの条件をみたすとき, これを**1の分解**という.

(1) $f_\lambda(x) \geqq 0, \quad x \in E, \ \lambda \in \Lambda$

(2) $\mathrm{supp}\,(f_\lambda) = \mathrm{Cl}\,\{x \in E;\ f(x) \neq 0\}$ とするとき, $\{\mathrm{supp}\,(f_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ は局所有限である. ここで Cl は閉包を表わす. そして $\mathrm{supp}(f_\lambda)$ を f_λ の**台**という.

(3) $\sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x) = 1$ (ここで左辺の和は条件(2)から有限和である)

いま $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が E の被覆とする，1の分解 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathcal{U}$ に**属する**とは，任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $\mathrm{supp}\,(f_\lambda)\subset U_\lambda$ が成立するときをいう．

定理 8　$\mathcal{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を正規空間 E の局所有限な開被覆とする．すると $\mathcal{U}$ に属する1の分解 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する．([2], [7])

定理 9　パラコンパクト空間 E の任意の開被覆 $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\mathcal{U}$ に属する1の分解 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在する．([2])

§8　距離空間(II)と Baire 空間

距離空間 X の点列 $\{x_n\}$ がつぎの性質(＊)をみたすとき，これを**基本列**，または **Cauchy 列**という．

(＊)　任意の正数 ε に対して，適当な番号 N があって，$m, n\geqq N$ なら $d(x_n, x_m)<\varepsilon$ となる．ここで d は X の距離である．

命題 1　収束する点列は基本列である．

しかし上の命題の逆は一般に成立しない．

任意の基本列が収束するような距離空間を**完備**という．実数空間 $\boldsymbol{R}$ は完備である．

定理 1　完備な距離空間 X の部分集合 Y が，その自然な距離に関して完備となるための必要十分条件は，Y が X の閉集合となることである．

定理 2　完備な距離空間の直積は完備である．

系　n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ は完備である．

定理 3　コンパクト距離空間は完備である．

A を集合，Y を距離空間，d' をその距離とする．A から Y への写像の列 $\{f_n\}$，$f_n: A\to Y$ が写像 $f: A\to Y$ に**一様収束**するとは，つぎの条件(＊)をみたすときをいう．

(＊)　任意の正数 ε に対して，適当な番号 N があって

$$n\geqq N \longrightarrow d'(f_n(x), f(x))<\varepsilon, \qquad x\in A$$

このとき $f_n \to f$ (一様), または $n \to \infty$ のとき $f_n \to f$ (一様) と書く.

定理 4 E を位相空間, Y を距離空間, $f_n : E \to Y, (n=1, 2, \cdots)$ を連続写像とする. いま $\{f_n\}$ が写像 $f : E \to Y$ に一様収束すれば, f は連続である.

写像 $f : A \to Y$ に関して $f(A)$ が有界なら, f を**有界**という. A から Y への有界な写像全体の集合を $\mathcal{B}(A ; Y)$ で表わす.

2つの有界写像 $f, g : A \to Y$ に対して $d(f, g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) ; x \in A\}$ とおくと, $\mathcal{B}(A ; Y)$ はこの d に関して距離空間となる. そして, $f_n \in \mathcal{B}(A ; Y), (n=1, 2, \cdots)$ がこの距離に関して $f \in \mathcal{B}(A ; Y)$ に収束することは, $\{f_n\}$ が f に一様収束することと同じである.

定理 5 E を位相空間, Y を距離空間とする. いま, E から Y への連続写像全体の集合を $\mathcal{C}(E ; Y)$, E から Y への有界な連続写像全体の集合を $\mathcal{BC}(E ; Y)$ とおくと, つぎのことが成立する.

(1) $\mathcal{BC}(E ; Y)$ は $\mathcal{B}(E ; Y)$ の閉集合である.

(2) Y が完備なら, $\mathcal{B}(E ; Y)$ は完備となる. したがって $\mathcal{BC}(E ; Y)$ も完備である.

(3) E がコンパクトなら $\mathcal{C}(E ; Y) = \mathcal{BC}(E ; Y)$ である. したがって, Y が完備なら $\mathcal{C}(E ; Y)$ は完備な距離空間である.

位相空間 E の部分集合は, これが可算個の稠密な開集合の共通部分として表わされるとき **Baire 集合**という. E の Baire 集合がすべて稠密となるとき, E を **Baire 空間**という.

位相空間 E の部分集合 A に対して $\mathrm{Int}\,\bar{A} = \phi$ となるとき, A を**全疎**という. たかだか可算個の全疎集合の和集合として表わされる E の部分集合を**第1類集合**, そうでないものを**第2類集合**という.

定理 6 つぎの4つの条件は, 互いに同値である.

(1) E は Baire 空間である.

(2) E の第1類集合の補集合は稠密である.

(3) E の空でない開集合は第2類集合である.

(4) 内点を持たない E の閉集合 $F_i, (i=1, 2, \cdots)$ の和集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ は内点を

持たない．([2], [7])

定理 7 (1) Baire 空間の空でない開集合は相対位相で Baire 空間となる．

(2) E の各点が Baire 空間となるような近傍を持てば，E は Baire 空間である．([2], [7])

定理 8 (1) 局所コンパクトな Hausdorff 空間は Baire 空間である．

(2) 完備な距離空間は Baire 空間である．([2], [7])

第3章　ベクトル空間

§1　ベクトル空間

これから簡単のため，K を実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$，または複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ とする．(しかし，ここの議論は一般の体 K でも成り立つ．)

集合 V の2元 x, y に対して，x と y の**和**と呼ばれる元 $x+y \in V$ が定まり，さらに K の元 λ と V の元 x に対して，その**スカラー倍**と呼ばれる元 $\lambda x \in V$ が定まっていて，つぎの条件(Ⅰ)，(Ⅱ)をみたすとき，V を(K 上の)**ベクトル空間**という．

(Ⅰ)　(1)　$x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x, y, z \in V$　　(**結合法則**)

(2)　V には $x+0=0+x=x,\ x \in V$ をみたす元0が存在する．これを**零ベクトル**，または**零元**という．

(3)　V の各元 x に対して，$x+(-x)=(-x)+x=0$ となるような元 $-x \in V$ が存在する．これを x の**逆元**という．

(4)　$x+y=y+x, \quad x, y \in V$　　(**可換法則**)

(Ⅱ)　(1)　$(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x), \quad \lambda, \mu \in K,\ x \in V$

(2)　$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \quad \lambda, \mu \in K,\ x \in V$

(3)　$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \quad \lambda \in K,\ x, y \in V$

(4)　$1x=x, \quad 1 \in K,\ x \in V$

K 上のベクトル空間 V に対して，K の元を**スカラー**，V の元を**ベクトル**という．$K=\boldsymbol{R}$ のとき，V は**実ベクトル空間**，$K=\boldsymbol{C}$ のとき，**複素ベクトル空間**という．

零ベクトルは V にただ1つ存在する．そして $\lambda 0=0x=0$，$\lambda\in K$，$x\in V$ が成立する．また $(-1)x=-x$ であって，$x+(-y)$ の代りに $x-y$ と書く．

m,n を自然数とし，K の mn 個の元をつぎのような長方形に並べたものを **(m,n) 型行列**という．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij}\in K, \quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,m \\ j=1,\cdots,n \end{pmatrix}$$

ここで横に一列に並んだ数の組を**行**という．A は m 個の行をもつ．また縦に一列に並んだ数の組を**列**という．A は n 個の列をもつ．A を構成する K の元を A の**要素**，または**成分**という．上の a_{ij} を A の **(i,j) 成分**という．行列 A を $A=(a_{ij})$ と略記することがある．これは (i,j) 成分が a_{ij} となる行列ということである．

K の元を成分にもつ (m,n) 型行列全体の集合を $M_K(m,n)$ と書く．これは，つぎの演算でベクトル空間となる．

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \lambda\in K$$

に対して

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで $M_K(m,n)$ の零元は，すべての成分が零となる行列で，$A=(a_{ij})$ の逆元 $-A$ は，各成分の符号を変えてできる行列 $(-a_{ij})$ である．

$(m,1)$ 型行列全体の空間 $M_K(m,1)$ を $\underline{K}^m$ であらわす．また，$M_K(1,n)$ を $K^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\,;\ x_i\in K,\ (i=1,\cdots,n)\}$ と同一視する．したがって，n 次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ は，$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間である．

V,W を K 上のベクトル空間とする．写像 $L\colon V\to W$ がつぎの2つの条件

をみたすとき，これを**線型(写像)**という．

(1) $L(x+y) = L(x)+L(y), \quad x, y \in V$

(2) $L(\lambda x) = \lambda L(x), \quad \lambda \in K, \ x \in V$

線型写像 $L: V \to W$ に対して，つぎの(3),(4)が成立する．

(3) $L(0) = 0$

(4) $L\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L(x_i), \quad \lambda_i \in K, \ x_i \in V$

(l, m)型行列 $A=(a_{ij})$ と (m, n) 型行列 $B=(b_{ij})$ に対して，(l, n)型行列 $C=(c_{ij})$ を $c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, $(i=1, \cdots, l; \ j=1, \cdots, n)$ と定義する．そして，この C を A と B の**積**といい，$C=AB$ で表わす．

この積に関して，つぎの法則が成立する．

命題 1 (1) A を (l, m)型，B を (m, n)型，C を (n, p)型とすると，

$$(AB)C = A(BC) \qquad \textbf{(結合法則)}$$

(2) A を (l, m)型，B, C を (m, n)型とすると，

$$A(B+C) = AB+AC \qquad \textbf{(分配法則)}$$

(3) A, B を (l, m)型，C を (m, n)型とすると，

$$(A+B)C = AC+BC \qquad \textbf{(分配法則)}$$

(4) A を (l, m)型，B を (m, n)型とし，$\lambda \in K$ とすると，

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

(5) E を (n, n)型で，$E=\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ の形の行列とする．

そして A を (m, n)型，B を (n, p)型とすると，

$$AE = A, \qquad EB = B$$

(この行列 E を，**n 次の単位行列**という.)

一般に (n, n)型行列を **n 次正方行列**という．A を n 次正方行列，E を n 次単位行列とする．いま，適当な n 次正方行列 X があって $AX=XA=E$ が成立するとき，A を**正則**という．A が正則なら，このような X は，A に対してただ1つに限る．これを A の**逆行列**といい，A^{-1} で表わす．すると，A が正則なら，$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ となる．

Aを(m,n)型のK行列とする．いま，写像 $L_A:\underline{K}^n\to\underline{K}^m$ を $L_A(x)=Ax$, $x\in\underline{K}^n$ とおく．すると，命題1から，これは線型である．

命題 2 (1) 恒等写像 $1_V: V\to V$ は線型である．

(2) $L_1: V_1\to V_2$, $L_2: V_2\to V_3$ をベクトル空間 V_1, V_2, V_3 の間の線型写像とすると，その合成 $L_2\circ L_1: V_1\to V_3$ も線型である．

ベクトル空間 V, W の間の全単射 $L: V\to W$ に対して，L およびその逆写像 L^{-1} が，ともに線型のとき，L を V から W への**同型**(**写像**)という．そして，V から W への同型写像が存在するとき，V と W は**同型**といい，$V\approx W$ で表わす．

命題 3 (1) 恒等写像は同型写像である．

(2) $L: V\to W$ が同型写像なら，$L^{-1}: W\to V$ も同型写像である．

(3) $L_1: V_1\to V_2$, $L_2: V_2\to V_3$ が同型写像なら，その合成 $L_2\circ L_1: V_1\to V_3$ も同型写像である．

系 $V\approx W$ という関係は同値関係である．

命題 4 全単射 $L: V\to W$ が線型なら，その逆写像 $L^{-1}: W\to V$ も線型である．したがって，L は同型写像である．

命題 5 A を(m,n)型行列とする．このとき，

(1) $L_A:\underline{K}^n\to\underline{K}^m$ が同型写像となるための必要十分条件は，$m=n$ で A が正則となることである．

(2) $m=n$ のとき，A が正則となるための必要十分条件は，A の行列式 $|A|$ (または $\det A$ とも書く)が零でないことである．

V, W を K 上のベクトル空間，$L, L_1, L_2: V\to W$ を線型写像，$\lambda\in K$ とする．このとき $L_1+L_2, \lambda L: V\to W$ を，$(L_1+L_2)(x)=L_1(x)+L_2(x)$, $(\lambda L)(x)=\lambda L(x)$, $x\in V$ と定義すると，これらは線型となる．そして，V から W への線型写像全体の集合を $L(V;W)$ で表わすと，$L(V;W)$ は，これらの演算によって，K 上のベクトル空間となる．

命題 6 $M_K(m,n)\ni A$ に対して，$L_A\in L(\underline{K}^n;\underline{K}^m)$ を対応させる写像は同型写像である．したがって，任意の線型写像 $L:\underline{K}^n\to\underline{K}^m$ に対して，$L(x)=$

Ax, $x \in \underline{K}^n$, をみたす(m, n)型行列 A はただ1つ存在する.

集合 G の2つの元 g_1, g_2 に対して，その**積**と呼ばれる G の元 g_1g_2 が定まって，つぎの3つの性質をみたすとき，これを**群**という.

(1)　$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$,　　$g_1, g_2, g_3 \in G$

(2)　G には $ge=eg=g$, $g \in G$ をみたす元 e が存在する.

(3)　G の各元 g にたいして，$gg^{-1}=g^{-1}g=e$ をみたす G の元 g^{-1} が存在する.

群 G に対して，上の(2)をみたす e は1つに限る．これを G の**単位元**といい，1と表わすこともある．また各 $g \in G$ に対して，(3)をみたす g^{-1} はただ1つに限る．これを g の**逆元**という.

群 G がつぎの条件(4)をみたすとき，**可換群**，または **Abel 群**という.

(4)　$g_1g_2 = g_2g_1$,　　$g_1, g_2 \in G$

Abel 群 G に対して，g_1g_2 の代りに g_1+g_2, e の代りに 0, g^{-1} の代りに $-g$ と書くと，上の(1)-(4)は，ベクトル空間の定義の(I)(1)-(4)と同じである．すなわち，ベクトル空間は加法に関して可換群である.

一般に積の代りに和の記号を用いた可換群を**加群**という.

ベクトル空間 V に対して，V から V への同型写像全体の集合を $\mathrm{GL}(V)$，または $\mathrm{Aut}(V)$ と表わす．すると $\mathrm{GL}(V) \ni L_1, L_2$ に対して，その合成 $L_1 \circ L_2$ は $\mathrm{GL}(V)$ の元となる(命題3)．これを積と考えることによって $\mathrm{GL}(V)$ は群となる．これは一般に可換ではない．$V=\underline{K}^n$ のとき，$\mathrm{GL}(\underline{K}^n)=\mathrm{GL}(n, K)$ とも表わし，**n 次の1次変換群**という.

n 次の正則行列全体の集合は，その積に関して群をなすが，命題5，命題6から $\mathrm{GL}(n, K)$ と同一視できる.

§2　基　　底

V を K 上のベクトル空間，W をその空でない部分集合とする．いま W が

つぎの2つの条件をみたすとき，これを V の**部分ベクトル空間**という．

(1)　$x, y \in W$　ならば　$x+y \in W$

(2)　$x \in W,\ \lambda \in K$　ならば　$\lambda x \in W$

このとき，つぎの命題が成り立つ．

命題 1　V, W を K 上のベクトル空間，$L: V \to W$ を線型写像とする．V_1, W_1 をそれぞれ V, W の部分ベクトル空間とすると，$L(V_1), L^{-1}(W_1)$ はそれぞれ W, V の部分ベクトル空間である．特に $L(V)=\mathrm{Im}\, L$，$L^{-1}(0)=\mathrm{Ker}\, L$ は W, V の部分ベクトル空間である．これをそれぞれ L の**像**および**核**という．

命題 2　線型写像 $L: V \to W$ が単射となるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}\, L=\{0\}$ となることである．

V を K 上のベクトル空間，S をその部分集合とする．いま S から有限個の元 $x_1, \cdots, x_n$ をとり，これに K の元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を掛けて加えたもの $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ を S の**1次結合**という．S の1次結合全体の集合を $L(S)$ とおく．

命題 3　$L(S)$ は S を含む V の最小の部分ベクトル空間である．この $L(S)$ を **S の張る空間**，または **S の生成する空間**という．

$W_1, \cdots, W_n$ を V の部分ベクトル空間とすると，$L(W_1 \cup \cdots \cup W_n)$ は集合 $\{x=x_1+\cdots+x_n;\ x_1 \in W_1,\ \cdots,\ x_n \in W_n\}$ と一致する．これを $W_1+\cdots+W_n$ と書き，$W_1, \cdots, W_n$ の**和空間**という．

$W_1, \cdots, W_n$ を V の部分ベクトル空間とする．いま V のベクトル x が $x=x_1+\cdots+x_n$, $x_i \in W_i$, $(i=1, \cdots, n)$ の形にただ1通りに表わされるとき，V は $W_1, \cdots, W_n$ の**直和**といい，$V=W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ または $V=\bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ と表わす．

命題 4　$V=W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ となるための必要十分条件は

(1)　$V = W_1+\cdots+W_n$

(2)　$W_i \cap (W_1+\cdots+W_{i-1}+W_{i+1}+\cdots+W_n) = \{0\}$,　　$i = 1, \cdots, n$

である．

n 個のベクトル空間 $V_1, \cdots, V_n$ に対して，その直積空間 $V=V_1 \times \cdots \times V_n$ はつぎの演算によって，ベクトル空間となる．すなわち，$v=(v_1, \cdots, v_n)$，$w=(w_1, \cdots, w_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ に対して $v+w=(v_1+w_1, \cdots, v_n+w_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n$ を

その和とし，$\lambda \in K$ に対して $\lambda v=(\lambda v_1, \cdots, \lambda v_n) \in V_1\times\cdots\times V_n$ をスカラー倍とする．このベクトル空間 $V=V_1\times\cdots\times V_n$ において $\bar{V}_i=\{(0, \cdots, 0, v_i, 0, \cdots, 0)\,;\, v_i \in V_i\}$ とおくと，これは V の部分ベクトル空間で，V_i と同型となる．そして $V=\bar{V}_1\oplus\cdots\oplus\bar{V}_n$ となる．したがって，$V=V_1\times\cdots\times V_n$ を $V_1, \cdots, V_n$ の直和ということがある．

V が2つの部分ベクトル空間 W_1, W_2 の直和となるとき，W_2 を W_1 の**補空間**という．

S を V の部分集合とする．S から有限個の(相異なる) $x_1, \cdots, x_n$ をとり $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n=0$, $\lambda_i \in K$, $(i=1, \cdots, n)$ なる方程式を考える．いま，このような任意の方程式に対して，つねに $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$ が成立するとき，S を**1次独立**という．そうでないとき，S は**1次従属**という．すなわち，S が1次従属とは，S の適当な(相異なる)元 $x_1, \cdots, x_n$ と K のすべては零ではないような元 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ があって $\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n=0$ となることである．

ベクトル空間 V の部分集合 S がつぎの2つの条件をみたすとき，これを V の**基底**という．

(1)　S は V を生成する．すなわち $V=L(S)$ となる．

(2)　S は1次独立である．

定理 1　V を $\{0\}$ でないベクトル空間とする．すると V は基底をもつ．さらに V の1次独立な部分集合 S に対して，これを含む基底が存在する．([1])

系　W を V の部分ベクトル空間とする．すると W はつねに補空間をもつ．すなわち，適当な部分ベクトル空間 W' があって $V=W\oplus W'$ となる．

定理 2　V を $\{0\}$ でないベクトル空間，S をその部分集合とする．S が V を生成するとき，S に含まれる V の基底が存在する．([1])

V が有限集合で生成されるとき，これを**有限次元**という．そうでないとき，V は**無限次元**という．有限次元空間は，定理2から，有限個の元からなる基底をもつことがわかる．

定理 3　V を $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間とする．すると V の任意の基底の個数は，すべて一定である．([1], [9], [10])

この個数を V の**次元**といい，$\dim V$ で表わす．$V=\{0\}$ のとき，V は**0 次元**といい，$\dim V=0$ で表わす．

命題 5 V が有限次元ベクトル空間で $\dim V=n$ とする．このとき，つぎのことが成立する．

(1) $\{x_1, \cdots, x_n\}$ が 1 次独立なら，これは基底である．

(2) $\{x_1, \cdots, x_m\}, m>n$ なら，これは 1 次従属である．

ここで $x_i \in V$ とする．

命題 6 V を有限次元ベクトル空間，$W_1, \cdots, W_n$ をその部分ベクトル空間とする．このとき，つぎの性質が成り立つ．

(1) $W_1 \subset W_2$ ならば $\dim W_1 \leqq \dim W_2 \leqq \dim V$

(2) $W_1 \subset W_2$ で $\dim W_1 = \dim W_2$ ならば $W_1 = W_2$

(3) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ なら $\dim V = \dim W_1 + \cdots + \dim W_n$

V をベクトル空間，W をその部分ベクトル空間とする．いま V の 2 元 x, y に対して，$x-y \in W$ のとき $x \equiv y \pmod{W}$ と表わす．するとこれは V の同値関係となる．この同値類全体の集合を V/W と表わす．

いま V/W の 2 元 c_1, c_2 に対し，その代表元 x_1, x_2 をとる．すると x_1+x_2 を含む同値類は x_1, x_2 のとり方に無関係に c_1, c_2 だけに依存して定まる．これを $c_1+c_2 \in V/W$ と表わし，c_1 と c_2 の**和**という．同様に，V/W の元 c と K の元 λ に対し，c の代表元 x の λ 倍 λx を含む同値類を $\lambda c \in V/W$ とすると，これは x のとり方に無関係に c だけで定まる．これを c の **λ 倍**という．

この 2 つの演算に関して V/W が K 上のベクトル空間となる．これを V の W による**商ベクトル空間**という．

V, W をベクトル空間，$L: V \to W$ を線型写像とする．いま V_1, W_1 をそれぞれ V, W の部分ベクトル空間とし，$L(V_1) \subset W_1$ とする．このとき，V の 2 元 x, y に対して $x \equiv y \pmod{V_1}$ なら $L(x) \equiv L(y) \pmod{W_1}$ が成立する．したがって，V/V_1 の元 c に対して，その代表元 x をとり，$L(x)$ をふくむ W/W_1 の同値類を考えると，これは x のとり方に無関係である．そこで，これを $\bar{L}(c) \in W/W_1$ と表わす．このようにして定まる写像 $\bar{L}: V/V_1 \to W/W_1$ が

線型写像となることはすぐわかる.

一般に V の2元 x, y に対し, $x \equiv y \pmod{\{0\}}$ ということは $x=y$ ということと同じであるから, $V/\{0\}$ と V を同一視することができる.

いま線型写像 $L: V \to W$ に対して, $L(\mathrm{Ker}\,L)=\{0\}$ であるから, 上に述べたことによって, 線型写像 $\bar{L}: V/\mathrm{Ker}\,L \to W/\{0\}=W$ が自然に定まる.

定理 4 V, W をベクトル空間とし, $L: V\to W$ を線型写像とすると, $\bar{L}$: $V/\mathrm{Ker}\,L \to W$ は $V/\mathrm{Ker}\,L$ から $\mathrm{Im}\,L$ への同型写像をひき起こす. とくに, $V/\mathrm{Ker}\,L \approx \mathrm{Im}\,L$ である. ([1])

定理 5 V を有限次元ベクトル空間, $L: V\to W$ を線型写像とする. このとき $\mathrm{Im}\,L=L(V)$ も有限次元で

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\,L + \dim \mathrm{Im}\,L$$

が成立する. ([9], [10])

系 V, W を有限次元ベクトル空間, $L: V\to W$ を線型写像とする. このとき, つぎの3つの条件は同値である.

(1) L は同型写像である,

(2) $\dim V = \dim W$ で $\mathrm{Ker}\,L = \{0\}$

(3) $\dim V = \dim W$ で $\mathrm{Im}\,L = W$

線型写像 $L: V\to W$ に対して, $\dim \mathrm{Im}\,L$ を L の**階数**といい, $\mathrm{rank}\,L$ と表わす.

$M_K(m, n)$ に属する行列で (i, j) 成分だけ1で他は0となるものを E_{ij}, $(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$ とすると, $\{E_{ij};\ i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n\}$ は $M_K(m, n)$ の基底となる. したがって $\dim M_K(m, n)=mn$ となる. 特に $\underline{K}^m$ において $e_i=E_{i1}$, $(i=1, \cdots, m)$ とおくと, $\{e_1, \cdots, e_m\}$ は $\underline{K}^m$ の基底となる. これを $\underline{K}^m$ の**標準基底**という.

A を (m, n) 型行列とし, $L_A. \underline{K}^n \to \underline{K}^m$ を $L_A(x)=Ax$ で定まる線型写像とする. このとき $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\,L_A$ とおき, これを A の**階数**という. A の第 i 列の表わすベクトル $a_i \in \underline{K}^m$ を A の**(第 i)列ベクトル**といい, $A=(a_1, \cdots, a_n)$ とも書く. すると $\mathrm{rank}\,A$ は $\underline{K}^m$ のベクトルの集合 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ の1次独立な

部分集合の個数の最大と一致する.

V, W を有限次元ベクトル空間, $L: V \to W$ を線型写像とする. いま $\mathcal{A}=\{a_1, \cdots, a_n\}$, $\mathcal{B}=\{b_1, \cdots, b_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とする. すると

$$L(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i, \qquad \alpha_{ij} \in K,\ j = 1, \cdots, n$$

と書ける. このときできる (m, n) 型行列 $A=(\alpha_{ij})$ を L の**基底** $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ **に関する行列**という.

$V=W$ のとき, 線型写像 $L: V \to V$ に対して, V の基底 $\mathcal{A}=\{a_1, \cdots, a_n\}$ をとり, L の $\mathcal{A}, \mathcal{A}$ に関する行列を, 単に L の $\mathcal{A}$ **に関する行列**という.

A を (m, n) 型行列, $L_A: \underline{K}^n \to \underline{K}^m$ を A の定める線型写像とする. $\underline{K}^n, \underline{K}^m$ の標準基底に関する L_A の行列は A と一致する.

V を有限次元ベクトル空間, $\mathcal{A}=\{a_1, \cdots, a_n\}$, $\mathcal{A}'=\{a_1', \cdots, a_n'\}$ をその2つの基底とする. すると

$$a_j' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} a_i, \qquad \lambda_{ij} \in K,\ j = 1, \cdots, n$$

と書ける. このときできる n 次正方行列 $P=(\lambda_{ij})$ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への**基底変換の行列**という. これは恒等写像 $1_V: V \to V$ の $\mathcal{A}', \mathcal{A}$ に関する行列と一致する.

$\underline{K}^n$ の標準基底を $\mathcal{A}=\{e_1, \cdots, e_n\}$ とする. $\mathcal{A}'=\{a_1', \cdots, a_n'\}$ をもう1つの基底とすると, $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換の行列は $P=(a_1', \cdots, a_n')$ すなわち $a_1', \cdots, a_n'$ を並べてできる n 次正方行列となる.

命題 7 (1) $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換の行列は正則行列であって, その逆行列は $\mathcal{A}'$ から $\mathcal{A}$ への基底変換の行列である.

(2) $\mathcal{A}=\{a_1, \cdots, a_n\}$ を基底とし, $P=(\lambda_{ij})$ を n 次正則行列とする. すると $a_j'=\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} a_i$, $(j=1, \cdots, n)$ とおいてできる $\mathcal{A}'=\{a_1', \cdots, a_n'\}$ も基底となり, $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換の行列は P となる.

命題 8 V, W を有限次元ベクトル空間, $L: V \to W$ を線型写像とする. いま $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を V の基底, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を W の基底とし, L の $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に関する行列を A とする. いま, $\mathcal{A}$ から $\mathcal{A}'$ への基底変換の行列を P, $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底変

換の行列を Q とすると，L の $\mathscr{A}', \mathscr{B}'$ に関する行列 A' は

$$A' = Q^{-1}AP$$

となる．

系　V を有限次元ベクトル空間，$L: V \to V$ を線型写像とする．V の基底を $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$，$\mathscr{A}$ から $\mathscr{A}'$ への基底変換の行列を P とする．L の $\mathscr{A}$ に関する行列を A とすると，L の $\mathscr{A}'$ に関する行列 A' は $A'=P^{-1}AP$ で与えられる．

§3　固有値と行列の標準形

V を $\{0\}$ でない有限次元ベクトル空間，$L: V \to V$ を線型写像とする．V の零でないベクトル x，K の元 α に対して，$L(x)=\alpha x$，となるとき，α を L の**固有値**，x を α に対する L の**固有ベクトル**という．また，$W_\alpha=\{x \in V; L(x)=\alpha x\}$ とおき，これを α に対する L の**固有空間**という．これは V の部分ベクトル空間である．

いま V の基底を1つとり，これに関する L の行列を A とする．そして，x を不定元とする多項式 $p(x)=\det(xE-A)$ を考える．(ここで E は単位行列とする.) すると，$p(x)$ は V の基底のとり方に無関係に，L だけに依存して定まる．そこで，これを L の**固有多項式**，$p(x)=0$ を L の**固有方程式**という．

命題 1　上の記号のもとで，α が L の固有値となるための必要十分条件は，α が L の固有方程式の根となることである．したがって $K=\boldsymbol{C}$ のとき，任意の線型写像 L は，必ず固有値とそれに対する固有ベクトルを持つ．

V を実ベクトル空間とする．このとき V の**複素化** V_C をつぎのように定義する．$V_C=V\times V$ で V_C の元 $v_C=(v_1, v_2)$，$v_1, v_2 \in V$ を $v_C=v_1+iv_2$ と表わすとき，V_C における和とスカラー倍を

$$(v_1+iv_2)+(w_1+iw_2)=(v_1+w_1)+i(v_2+w_2), \qquad v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$$
$$(a+ib)(v_1+iv_2)=(av_1-bv_2)+i(bv_1+av_2), \qquad a, b \in \boldsymbol{R}$$

と定義する．すると V_C は複素ベクトル空間となる．

V, W を実ベクトル空間，$L: V \to W$ を線型写像とする．このとき $L_C: V_C \to W_C$ を

$$L_C(v_1 + iv_2) = L(v_1) + iL(v_2), \qquad v_1, v_2 \in V$$

と定義すると，これは線型となる．これを L の**複素化**という．

一般に $\underline{\boldsymbol{R}}^n$ の複素化は $\underline{\boldsymbol{C}}^n$ と考えることができる．また A を実(m, n)型行列とすると，$L_A: \underline{\boldsymbol{R}}^n \to \underline{\boldsymbol{R}}^m$ $(L_A(x) = Ax)$の複素化は，A を複素行列と考えたときの $L_A: \underline{\boldsymbol{C}}^n \to \underline{\boldsymbol{C}}^m$ と一致する．

複素 n 次正方行列 A に対して，$L_A: \underline{\boldsymbol{C}}^n \to \underline{\boldsymbol{C}}^n$ の固有値，固有ベクトルを，A の**固有値**，A の**固有ベクトル**という．そして $p(x) = \det(xE - A)$を A の**固有多項式**という．これは L_A の固有多項式と一致する．A の**固有方程式**，**固有空間**などについても同様である．

A が実正方行列のときも，これを複素行列と考えて，その固有値，固有ベクトルなどを考える．

K の元を成分とする2つの n 次正方行列 A, B にたいして，適当な n 次の正則な K 行列 P があって，$B = P^{-1}AP$ となるとき，A と B は**相似**といい，$A \sim B$ で表わす．この関係が同値関係となることはすぐわかる．

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \alpha \end{pmatrix}$$

の形の k 次正方行列を **Jordan 細胞**という．α が実数のとき，これを**実 Jordan 細胞**という，この行列の固有値はすべて α である．このような Jordan 細胞 $J_1, \cdots, J_s$ を対角線に並べてできる行列を **Jordan 行列**という．

定理 1 任意の複素正方行列 A は Jordan 行列と相似である．このとき現われる Jordan 細胞は，順序を除いて，A のみに依存して一意的に定まる．([1], [9], [10])

この Jordan 行列を A の **Jordan 標準形**という．

$$
(**)\qquad
\left(\begin{array}{cc:cc:c}
a & -b & 1 & 0 & \\
b & a & 0 & 1 & \\
\hdashline
 & & a & -b & \\
 & & b & a & \\
\hdashline
 & & & & \ddots
\end{array}\right)
$$

の形の $2k$ 次実正方行列も**実 Jordan 細胞**という．この行列の固有値はすべて $a\pm bi$ である．(＊)および(＊＊)の形の実 Jordan 細胞を対角線に並べてできる行列を**実 Jordan 行列**という．

定理 2 任意の実正方行列 A は実 Jordan 行列と相似である．このとき現われる実 Jordan 細胞は，順序を除いて，A のみに依存して一意的に定まる．([12])

この実 Jordan 行列を，A の**実 Jordan 標準形**という．

第4章　ノルム空間

§1　ノルム空間と連続線型写像

ここでも，K を実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$，または複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ とする．(特に必要がないとき，K は省略することもある.)

集合 E に，位相空間の構造と K 上のベクトル空間の構造が入っていて，その和とスカラー倍によって定まる2つの写像 $E\times E\ni(x,y)\mapsto x+y\in E$, $K\times E\ni(\lambda,x)\mapsto\lambda x\in E$ が連続のとき，E を K 上の**位相ベクトル空間**という.

2つの位相ベクトル空間 E,F の間の線型写像 $L:E\to F$ が連続のとき，これを**連続線型(写像)**という．E から F への全単射 $L:E\to F$ に関して，L および L^{-1} が連続線型のとき，L を**線型同相写像**という．すなわち，L はベクトル空間としての同型写像で，さらに位相空間として同相写像ということである.

K 上のベクトル空間 E の各元 x に対して，正または零の実数 $\|x\|$ が定まっていて，つぎの条件をみたすとき，これを K 上の**ノルム空間**という．そして $\|x\|$ を x の**ノルム**という.

(1)　$\|x\|=0 \rightleftarrows x=0$

(2)　$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$,　　$\lambda\in K$, $x\in E$, ($|\lambda|$ は λ の**絶対値**)

(3)　$\|x+y\|\leqq\|x\|+\|y\|$,　　$x,y\in E$　　(**三角不等式**)

命題 1　ノルム空間 E に対して，$d(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in E$ とおくと，これは E の距離となる．そして，この距離によって E に位相が入るが，この位相に関して E は位相ベクトル空間となる.

ノルム空間 E が，この距離 $d(x,y)=\|x-y\|$, $x,y\in E$ に関して完備なと

き，これを **Banach 空間**という．

E を K 上のベクトル空間とする．$K=\boldsymbol{C}$ のとき，$\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対して，その**共役複素数**を $\bar{\lambda}\in\boldsymbol{C}$ で表わす．$\lambda\in\boldsymbol{R}$ なら，勿論 $\bar{\lambda}=\lambda$ である．

いま E の2元 x, y に対し $(x|y)\in K$ が定まり，つぎの性質をみたすとき，これを E の**内積**という．

(1) $(x+x'|y)=(x|y)+(x'|y)$,

$(x|y+y')=(x|y)+(x|y')$

(2) $(\lambda x|y)=\lambda(x|y)$,

$(x|\lambda y)=\bar{\lambda}(x|y)$

(3) $(y|x)=\overline{(x|y)}$

(4) $(x|x)$ は正または零の実数で，　$(x|x)=0 \rightleftarrows x=0$

$$(x, x', y, y'\in E,\ \lambda\in K)$$

内積をもつベクトル空間 E に対してつぎの不等式が成立する．

Cauchy-Schwarz の不等式　$|(x|y)|^2 \leqq (x|x)(y|y), \quad x, y\in E$

Minkowsky の不等式　$\sqrt{(x+y|x+y)} \leqq \sqrt{(x|x)}+\sqrt{(y|y)}, \quad x, y\in E$

命題 2　内積をもつ K 上のベクトル空間 E の各元 x に対し，$\|x\|=\sqrt{(x|x)}$ とおくと，このノルムに関して E は K 上のノルム空間となる．したがって，これは K 上の位相ベクトル空間でもある．

内積をもつベクトル空間 E が，そのノルムによる距離 $d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y|x-y)}$ に関して完備のとき，これを **Hilbert 空間**という．したがって，Hilbert 空間は Banach 空間である．

命題 3　$K^n=\{x=(x_1, \cdots, x_n);\ x_i\in K\}$ の2元 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, \cdots, y_n)$ に対して，$(x|y)=x_1\bar{y}_1+\cdots+x_n\bar{y}_n$ とおくと，これは K^n の内積である．この内積によって K^n は Hilbert 空間となる．

命題 4　E, F をノルム空間，$L: E\to F$ を線型写像とする．このとき L が連続となるための必要十分条件は，適当な定数 $c\geqq 0$ に対して

$$\|L(x)\| \leqq c\|x\|, \quad x\in E$$

が成立することである．

連続線型写像 $L: E \to F$ に対して，上の不等式をみたすような c 全体の集合の下限を $\|L\|$ で表わす．そしてこれを L の**ノルム**という．

命題 5　連続線型写像 $L: E \to F$ (E, F はノルム空間)に対してつぎの等式が成立する．

$$\|L\| = \sup\{\|L(x)\|;\ \|x\| \leqq 1\} = \sup\{\|L(x)\|;\ \|x\| = 1\}$$
$$= \sup\{\|L(x)\|/\|x\|;\ x \neq 0\}$$

系　(1)　ノルム空間 E, F の間の線型写像 $L: E \to F$ に対して

$$\|L(x)\| \leqq \|L\|\|x\|, \qquad x \in E$$

が成立する．

(2)　E_1, E_2, E_3 をノルム空間，$L_1: E_1 \to E_2$, $L_2: E_2 \to E_3$ を連続線型とすると

$$\|L_2 L_1\| \leqq \|L_2\|\|L_1\|$$

命題 6　E, F をノルム空間とする．いま E から F への連続線型写像全体の集合を $\mathcal{L}(E; F)$ とすると，これは E から F への線型写像全体のつくるベクトル空間 $L(E; F)$ の部分ベクトル空間となる．そして $\mathcal{L}(E; F)$ の元 L に対して $\|L\|$ をそのノルムとして，$\mathcal{L}(E; F)$ はノルム空間となる．とくに F が Banach 空間なら，$\mathcal{L}(E; F)$ も Banach 空間となる．

ベクトル空間 E に2つのノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ があって，そのどちらに関しても E がノルム空間になるものとする．このとき，これらが E に同じ位相をひき起こすとき，すなわち位相ベクトル空間としては同じとなるとき，これら**2つのノルムは同値**という．

命題 7　E の2つのノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ が同値となるための必要十分条件は，適当な定数 $a>0$, $b>0$ があって

$$a\|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq b\|x\|_1, \qquad x \in E$$

が成立することである．

系　$K^n \ni (x_1, \cdots, x_n) = x$ に対して，つぎの3つのノルムはすべて同値である．

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2},$$
$$\|x\|_1 = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\},$$

$$\|x\|_2 = |x_1|+\cdots+|x_n|$$

特につぎの不等式が成立する.

$$\|x\|_1 \leqq \|x\| \leqq \|x\|_2 \leqq n\|x\|_1, \qquad x \in K^n$$

A を集合, E を K 上のノルム空間とする. A から E への有界な写像全体の集合を $\mathcal{B}(A;E)$ とする. A から E への2つの有界な写像 $f, g: A\to E$ に対して, その和 $f+g$ を $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $x\in A$ とおくと, これは有界である. すなわち $f+g\in\mathcal{B}(A;E)$ となる. また $\lambda\in K$ に対して λf を $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$, $x\in A$ とおくと, $\lambda f\in\mathcal{B}(A;E)$ となる. このときつぎの命題が成り立つ.

命題 8 $\mathcal{B}(A;E)$ は上の和とスカラー倍に関して, K 上のベクトル空間となる. いま $f\in\mathcal{B}(A;E)$ に対して, $\|f\|=\sup\{\|f(x)\|;\ x\in A\}$ とおくと, これは $\mathcal{B}(A;E)$ のノルムとなる. そして, このノルムによる距離は第2章§8のものと一致する. したがって, E が Banach 空間なら $\mathcal{B}(A;E)$ も Banach 空間となる.

このノルムを **sup ノルム**という.

ノルム空間 E の点列 x_n, $(n=0,1,2,\cdots)$ に対して, その部分和 $s_n=x_0+x_1+\cdots+x_n$ の作る点列 $\{s_n\}$ が収束するとき, **級数** $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ **は収束する**といい, $s=\lim_{n\to\infty} s_n$ をその**和**という. そして $s=\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ と表わす.

命題 9 E をノルム空間, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ を E の収束する級数とする. このとき, つぎの(*)が成立する.

(*) 任意の正数 ε に対して, 適当な番号 N があって

$$m > n \geqq N \quad \text{ならば} \quad \|x_{n+1}+\cdots+x_m\| < \varepsilon$$

E が Banach 空間なら, (*)をみたす級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ は収束する.

ノルム空間 E の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ に対して, 実数の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$ が収束するとき, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ は**絶対収束**するという.

命題 10 E が Banach 空間なら, 絶対収束する E の級数は収束する.

命題 11 E を Banach 空間, $L: E\to E$ を連続線型写像とする. いま,

$\|L\|<1$ とすると，$1_E-L:E\to E$ (1_E は E の恒等写像)は線型同相写像で，$(1-L)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}L^n$ となる．そして，$\|(1-L)^{-1}\|\leqq 1/(1-\|L\|)$ が成立する．

命題 12　E,F を Banach 空間，Iso$(E;F)$ を E から F への線型同相写像全体の作る集合とする．するとこれは $\mathscr{L}(E;F)$ の開集合である．

§2　直和，有限次元空間，その他いろいろな定理

E を K 上の位相ベクトル空間，F をその部分ベクトル空間とする．すると F はその自然な位相と自然なベクトル空間の構造で，K 上の位相ベクトル空間となる．また F の閉包 $\bar{F}$ も E の部分ベクトル空間となり，したがって K 上の位相ベクトル空間となる．また商空間 E/F も，その自然な位相(商位相)とベクトル空間の構造から，K 上の位相ベクトル空間となる．

E_1,E_2 を K 上の位相ベクトル空間とする．すると，この直積 $E_1\times E_2$ は自然な位相と自然なベクトル空間の構造によって，K 上の位相ベクトル空間となる．これを E_1 と E_2 の**直積位相ベクトル空間**という．

K 上の位相ベクトル空間 E の2つの部分ベクトル空間 E_1,E_2 に対して，写像 $\varphi:E_1\times E_2\to E$ を $\varphi(x_1,x_2)=x_1+x_2$，$x_1\in E_1$，$x_2\in E_2$ と定義する．いまこの φ が線型同相写像となるとき，E を E_1 と E_2 の**位相直和**といい，$E=E_1\oplus E_2$(位相直和)と書く．このとき，E_1,E_2 は E の**位相直和因子**という．また，E_2 を E_1 の**位相補空間**という．

定義から $E=E_1\oplus E_2$(位相直和)となるための必要十分条件は E がベクトル空間として，E_1 と E_2 の直和となり，さらに上の $\varphi:E_1\times E_2\to E$ が同相写像となることである．特にこのとき，E_1,E_2 は E の閉部分ベクトル空間となる．

2つの位相ベクトル空間 E_1,E_2 の直積 $E=E_1\times E_2$ に対し，$E=E_1\times\{0\}\oplus\{0\}\times E_2$(位相直和)が成立する．したがって E_1 と $E_1\times\{0\}$，E_2 と $\{0\}\times E_2$ を自然に同一視すると，$E=E_1\times E_2=E_1\oplus E_2$(位相直和)と考えられる．

E を K 上のノルム空間とする．すると，その部分ベクトル空間はまた K 上

のノルム空間となる．E が Banach 空間のとき，その閉部分ベクトル空間は，また Banach 空間である．さらにつぎの命題が成立する．

命題 1　E を K 上のノルム空間，F をその閉部分ベクトル空間とする．いま $\alpha\in E/F$ に対し，$\|\alpha\|=\inf\{\|x\|;\ x\in\alpha\}$ とおくと，E/F はこのノルムに関して，ノルム空間となる．とくに E が Banach 空間なら，E/F も Banach 空間である．

E_1, E_2 が K 上のノルム空間のとき，$x=(x_1, x_2)\in E_1\times E_2$ に対し，$\|x\|=\max(\|x_1\|, \|x_2\|)$ とおくと，$E_1\times E_2$ はこのノルムに関して K 上のノルム空間となる．このノルムの代りに，$\|x\|_1=\|x_1\|+\|x_2\|$ または $\|x\|_2=\sqrt{\|x_1\|^2+\|x_2\|^2}$ を用いても $E_1\times E_2$ はノルム空間となるが，これらはすべて同値なノルムとなることが知られている．

E を $\boldsymbol{R}$ 上の位相ベクトル空間とする．いま E の実ベクトル空間としての複素化を E_C とする(第 3 章§3)．すると E_C は複素ベクトル空間で，$E_C=E\times E$ である．そして E_C の元は $x+iy$, $x, y\in E$ の形に一意的に表わされる．

E_C における和とスカラー倍の定義から，和とスカラー倍によって定義される写像 $E_C\times E_C\to E_C$ および $\boldsymbol{C}\times E_C\to E_C$ は連続となる．したがって E_C は $\boldsymbol{C}$ 上の位相ベクトル空間となる．

E が実ノルム空間のとき，$x+iy\in E_C$ に対して

$$\|x+iy\| = \sup\{\|(\cos\theta)x+(\sin\theta)y\|;\ 0\leqq\theta<2\pi\}$$

とおくと，これは E_C の複素ノルム空間としてのノルムとなることが簡単に確められる．そして $x\in E$ に対して，このノルムはもとのノルムと一致する．

また

$$\max\{\|x\|, \|y\|\}\leqq\|x+iy\|\leqq\|x\|+\|y\|\leqq 2\max\{\|x\|, \|y\|\}$$

となるから，E_C は実ノルム空間として $E_C=E\times E$ の直積ノルムと同値である．

E が実 Banach 空間なら，E_C は複素 Banach 空間である．

つぎに，E, F を $\boldsymbol{R}$ 上の位相ベクトル空間，$L: E\to F$ を連続線型写像とする．このとき，その複素化 $L_C: E_C\to F_C$ は $L_C(x+iy)=L(x)+iL(y)$, $x+iy\in E_C$ によって定義される．したがって L_C は $\boldsymbol{C}$ 上の位相ベクトル空間の間の連続

線型写像である.

$L: E \to F$ が線型同相写像なら, L_C も線型同相写像で, $(L_C)^{-1} = (L^{-1})_C$ となる.

E, F が実ノルム空間で, $L: E \to F$ が連続線型写像のとき, $x+iy \in E_C$ に対して

$$\begin{aligned}
\|L_C(x+iy)\| &= \|L(x)+iL(y)\| \\
&= \sup\{\|(\cos\theta)L(x)+(\sin\theta)L(y)\|;\ 0 \leqq \theta < 2\pi\} \\
&= \sup\{\|L((\cos\theta)x+(\sin\theta)y)\|;\ 0 \leqq \theta < 2\pi\} \\
&\leqq \|L\| \sup\{\|(\cos\theta)x+(\sin\theta)y\|;\ 0 \leqq \theta < 2\pi\} \\
&= \|L\|\,\|x+iy\|
\end{aligned}$$

となるから, $\|L_C\| \leqq \|L\|$ となる.

一方,

$$\begin{aligned}
\|L_C\| &= \sup\{\|L_C(x+iy)\|;\ \|x+iy\| = 1\} \\
&\geqq \sup\{\|L(x)\|;\ \|x\| = 1\} = \|L\|
\end{aligned}$$

となるから, $\|L_C\| = \|L\|$ が成立する.

つぎに重要な定理をいくつか述べることにしよう.

定理 1 **(開写像定理)** E, F を Banach 空間, $L: E \to F$ を連続線型写像とする. いま, さらに L が全射とすると, L は開写像である. すなわち, 開集合の L による像は開集合である. ([5])

とくに L が全単射なら, L は線型同相写像である.

系 1 E, F を Banach 空間, $L: E \to F$ を連続線型写像とする. いま L が全射なら, L のひき起こす自然な写像 $\bar{L}: E/\mathrm{Ker}\, L \to F$ は線型同相写像である.

系 2 E を Banach 空間, E_1, E_2 をその閉部分ベクトル空間とする. いま E がベクトル空間として, E_1 と E_2 の直和なら, E は E_1 と E_2 の位相直和となる.

定理 2 **(Hahn-Banach)** E を K 上のノルム空間, F をその部分ベクトル空間とする. いま F から K への線型写像 $L: F \to K$ が, ある定数 $c \geqq 0$ に対し $\|L(x)\| \leqq c\|x\|$, $x \in F$ をみたすものとする. このとき, L の拡張 $\tilde{L}: E \to K$ で

$\|\tilde{L}(x)\| \leqq c\|x\|$, $x \in E$ をみたしさらに線型写像となるものが存在する．([5])

定理 3　K 上の有限次元ノルム空間は K^n と線型同相である．したがって完備である．([3])

系 1　有限次元ノルム空間の間の任意の線型写像は連続である．

系 2　有限次元ノルム空間の部分ベクトル空間は，すべて位相直和因子である．

定理 4　E をノルム空間，F をその閉部分ベクトル空間，G を E の有限次元部分ベクトル空間とする．すると $F+G$ は E の閉部分ベクトル空間である．

とくに有限次元部分ベクトル空間はすべて閉部分空間である．([3])

定理 5　E をノルム空間，F をその閉部分ベクトル空間とする．いま E/F が有限次元とし，F の E におけるベクトル空間としての補空間を G とする．すると，$E=F \oplus G$ (位相直和) となる．([3])

定理 6　局所コンパクトなノルム空間は有限次元である．したがって K^n と線型同相である．([3])

§3　多重線型写像

$E_1, \cdots, E_n, E, F$ を K 上のベクトル空間とする．いま，写像 $L: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ がつぎの性質(1), (2)をみたすとき，これを**多重線型**，または **n 重線型**(**写像**)という．

(1)　$L(x_1, \cdots, x_i+x_i', \cdots, x_n) = L(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n) + L(x_1, \cdots, x_i', \cdots, x_n)$

(2)　$L(x_1, \cdots, \lambda x_i, \cdots, x_n) = \lambda L(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$

ここで $x_i, x_i' \in E_i$, $x_j \in E_j$, $\lambda \in K$ とする．

$E_1 = \cdots = E_n = E$ のとき，このような L を **E から F への n 重線型写像**という．1重線型は線型と同じである．

$L_1, L_2: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ を n 重線型写像，$\lambda \in K$ とする．このとき L_1+L_2, $\lambda L_1: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ を

$$(L_1+L_2)(x_1, \cdots, x_n) = L_1(x_1, \cdots, x_n) + L_2(x_1, \cdots, x_n),$$
$$(\lambda L_1)(x_1, \cdots, x_n) = \lambda L_1(x_1, \cdots, x_n), \qquad x_i \in E_i$$

と定義する．すると L_1+L_2, λL_1 も n 重線型となる．そして $E_1\times\cdots\times E_n$ から F への多重線型写像全体の集合を $L(E_1, \cdots, E_n; F)$ とおくと，これは上の2つの演算によって K 上のベクトル空間となる．

$E_1=\cdots=E_n=E$ のとき，$L(E_1, \cdots, E_n; F)=L^n(E; F)$ と表わす．

§1の連続線型写像のときと同様に，つぎのことが成立する．

命題 1 $E_1, \cdots, E_n, F$ がノルム空間とする．このとき，多重線型写像 L: $E_1\times\cdots\times E_n\to F$ が連続となるための必要十分条件は，適当な定数 $c\geqq 0$ があって

$$\|L(x_1, \cdots, x_n)\| \leqq c\|x_1\|\cdots\|x_n\|, \qquad x_i \in E_i$$

が成立することである．

連続多重線型写像 L に対して，上の不等式をみたすような定数 $c\geqq 0$ 全体の集合の下限を $\|L\|$ とおき，これを L の**ノルム**という．

命題 2 $E_1, \cdots, E_n, F$ をノルム空間とする．このとき，$L: E_1\times\cdots\times E_n\to F$ が連続多重線型なら，つぎの等式が成立する．

$$\begin{aligned}\|L\| &= \sup\{\|L(x_1, \cdots, x_n)\|;\ \|x_1\|\leqq 1, \cdots, \|x_n\|\leqq 1\}\\ &= \sup\{\|L(x_1, \cdots, x_n)\|;\ \|x_1\|=1, \cdots, \|x_n\|=1\}\\ &= \sup\{\|L(x_1, \cdots, x_n)\|/\|x_1\|\cdots\|x_n\|;\ x_1\neq 0, \cdots, x_n\neq 0\}\end{aligned}$$

系 上と同じ仮定でつぎの不等式が成立する．

$$\|L(x_1, \cdots, x_n)\| \leqq \|L\|\|x_1\|\cdots\|x_n\|, \qquad x_i \in E_i$$

例 1 E, F, G をノルム空間とし，$\mathrm{comp}: \mathscr{L}(E; F)\times\mathscr{L}(F; G)\to\mathscr{L}(E; G)$ を写像の合成によって定義される写像とする．すなわち $\mathrm{comp}(L_1, L_2)=L_2\circ L_1$, $(L_1, L_2)\in\mathscr{L}(E; F)\times\mathscr{L}(F; G)$．するとこれは連続2重線型で，$E, F, G$ のどれも零でないなら $\|\mathrm{comp}\|=1$ となる．

例 2 E, F をノルム空間とし，$\mathrm{ev}: E\times\mathscr{L}(E; F)\to F$ を $\mathrm{ev}(x, L)=L(x)$, $(x, L)\in E\times\mathscr{L}(E; F)$ とする．すると，これも連続2重線型で，E, F が零でないなら $\|\mathrm{ev}\|=1$ となる．

命題 3 $E_1, \cdots, E_n, F$ をノルム空間とする．$E_1 \times \cdots \times E_n$ から F への連続多重線型写像全体の作る集合を $\mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ とする．これは $L(E_1, \cdots, E_n; F)$ の部分ベクトル空間となる．そして $L \in \mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ に対して，そのノルム $\|L\|$ を対応させることによって，これはノルム空間となる．

特に F が Banach 空間なら，$\mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ も Banach 空間となる．

$E_1 = \cdots = E_n = E$ のとき，$\mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F) = \mathscr{L}^n(E; F)$ と表わす．そして $\mathscr{L}^n(E; F)$ の元を，**E から F への連続 n 重線型写像**という．

n 個の文字の集合 $\{1, \cdots, n\}$ からそれ自身への全単射を，n 個の文字 $\{1, \cdots, n\}$ の**置換**という．$\{1, \cdots, n\}$ の置換全体の集合を S_n とおく．2つの置換 σ_1, σ_2: $\{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ に対して，その合成写像 $\sigma_1\sigma_2 : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ を σ_1 と σ_2 の積とする．すなわち $\sigma_1\sigma_2(i) = \sigma_1(\sigma_2(i))$, $(i=1, \cdots, n)$ とする．すると，この積に関して S_n は群をなす．これを **n 次対称群**という．この群の単位元は $\{1, \cdots, n\}$ の恒等写像(恒等置換)で，$\sigma \in S_n$ の逆元は σ の逆写像 σ^{-1}(逆置換)である．

2つの相異なる文字 i, j を入れかえ，他は動かさないような置換を**互換**という．そしてこれを (i, j) で表わす．

命題 4 (1) 任意の置換 σ は互換の積として表わされる．

(2) 置換 σ を互換の積として，2通りに表わすときの互換の個数を，それぞれ p, q とすると，$(-1)^p = (-1)^q$ となる．すなわち，p, q は同時に偶数となるか，または同時に奇数となる．

上の命題の $(-1)^p = (-1)^q$ を σ の**符号**といい，$\mathrm{sgn}\,\sigma$ で表わす．偶数個の互換の積として表わされるような置換，すなわち $\mathrm{sgn}\,\sigma = +1$ となる σ を**偶置換**，奇数個の互換の積として表わされるような置換，すなわち $\mathrm{sgn}\,\sigma = -1$ となる σ を**奇置換**という．

S_n の偶置換全体の集合を A_n とすると，これは S_n の部分群(すなわち，S_n の部分集合で，S_n の積に関して群となる)となる．これを **n 次の交代群**という．

E から F への n 重線型写像 $L : E \times \cdots \times E \to F$，および n 個の文字の置換 $\sigma \in S_n$ に対して，$\sigma L : E \times \cdots \times E \to F$ を $\sigma L(x_1, \cdots, x_n) = L(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$,

$x_i \in E_i$ とおく．すると σL も多重線型となる．また L が連続なら，σL も連続となる．

E から F への n 重線型写像 L に対して，$\sigma L = L$，$\sigma \in S_n$ が成立するとき，L は**対称**という．また $\sigma L = \operatorname{sgn} \sigma\, L$，$\sigma \in S_n$ となるとき，L を**交代**という．

命題 5 E, F をノルム空間とし，E から F への対称な連続 n 重線型写像全体の集合を $\mathscr{S}^n(E;F)$，交代な連続 n 重線型写像全体の集合を $\mathscr{A}^n(E;F)$ とすると，これらは $\mathscr{L}^n(E;F)$ の閉部分ベクトル空間である．

$E_1, \cdots, E_n, F$ をノルム空間，$L: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ を連続 n 重線型とする．$i = 1, \cdots, n$ として，$L_i(x_1, \cdots, x_i)(x_{i+1}, \cdots, x_n) = L(x_1, \cdots, x_n)$，$x_j \in E_j$ とおくと，$L_i(x_1, \cdots, x_i): E_{i+1} \times \cdots \times E_n \to F$ は連続$(n-i)$重線型となる．したがって $L_i: E_1 \times \cdots \times E_i \to \mathscr{L}(E_{i+1}, \cdots, E_n; F)$ が定義されるが，これは連続 i 重線型となる．

命題 6 上と同じ仮定と記号のもとで，$L \in \mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ に対して，$L_i \in \mathscr{L}(E_1, \cdots, E_i; \mathscr{L}(E_{i+1}, \cdots, E_n; F))$ を対応させる写像 $\varphi_i: \mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F) \to \mathscr{L}(E_1, \cdots, E_i; \mathscr{L}(E_{i+1}, \cdots, E_n; F))$, $(i = 1, \cdots, n)$ は，ノルムを保つ線型同相写像である．

今後この同型写像を用いて，$\mathscr{L}(E_1, \cdots, E_n; F) = \mathscr{L}(E_1, \cdots, E_i; \mathscr{L}(E_{i+1}, \cdots, E_n))$ と同一視することもある．

系 $E_1 = \cdots = E_n = E$ のとき，$\mathscr{L}^n(E;F) = \mathscr{L}^i(E; \mathscr{L}^{n-i}(E;F))$, $(i = 1, \cdots, n)$ となる．特に $\mathscr{L}^n(E;F) = \mathscr{L}(E; \mathscr{L}^{n-1}(E;F))$ である．

第5章　ノルム空間における微積分

§1　微　分

この章でも K は実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ または複素数全体の集合 $\boldsymbol{C}$ とする．

E, F を K 上のノルム空間，A を E の開集合とする．写像 $f: A \to F$ が点 $a \in A$ **で微分可能**とは，適当な連続線型写像 $L: E \to F$ があって，つぎの条件 (1) をみたすときをいう．

(1)　$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|}{\|h\|} = 0, \qquad h \in E,\ a+h \in A$$

この条件 (1) はつぎの (1)′ と同値である．

(1)′　$f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varphi(h), \qquad \varphi(h) \in F$

とおくと，

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

f が A の各点で微分可能のとき，f は**微分可能**という．

命題 1　$f: A \to F$ が点 $a \in A$ で微分可能なら，点 a で連続である．さらに (1) をみたす連続線型写像 $L: E \to F$ は一意的に定まる．

この L を f の a における微係数といい，$Df(a)$ または $f'(a)$ で表わす．この記号を用いると，上の (1), (1)′ はつぎの (2), (2)′ となる．

(2)　$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0$$

(2)′　$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \|h\|\varphi(h), \qquad \varphi(h) \in F$

とすると

$$\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

そして $Df(a)\in\mathscr{L}(E;F)$ である．

$f:A\to F$ が A の各点で微分可能のとき，A の各点 a にたいして $Df(a)\in\mathscr{L}(E;F)$ を対応させる写像 $Df:A\to\mathscr{L}(E;F)$ を f の**導関数**という．Df が連続のとき，f は **C^1 級**という．

命題 2　$\mathscr{L}(K;F)$ の元 $L:K\to F$ に対して $L(1)\in F$ を対応させる写像 $\varphi:\mathscr{L}(K;F)\to F$ はノルムを保つ線型同相写像で，その逆写像 $\varphi^{-1}:F\to\mathscr{L}(K;F)$ は $\varphi^{-1}(b)(\lambda)=\lambda b,\ \lambda\in K,\ b\in F$ で与えられる．

この対応 φ で $\mathscr{L}(K;F)$ と F を同一視する．いま A を K の開集合とすると，$f:A\to F$ が点 $a\in A$ で微分可能のとき，その微係数 $Df(a)$ は F の元と考えることができる．特に，$F=K$ のとき $Df(a)$ は普通の微係数 $\dfrac{df}{dx}(a)$ と一致する．

命題 3　(1)　定値写像 $f:A\to F$ は微分可能で，$Df(a)=0,\ a\in A$ となる．

(2)　連続線型写像 $L:E\to F$ は微分可能で，$DL(a)=L,\ a\in E$ となる．

(3)　$f,g:A\to F$ が点 $a\in A$ で微分可能，$\lambda\in K$ とする．このとき $f+g,\lambda f:A\to F$ は点 a で微分可能で

$$D(f+g)(a)=Df(a)+Dg(a),$$
$$D(\lambda f)(a)=\lambda Df(a)$$

となる．

命題 4　E_1,E_2,F をノルム空間，$L:E_1\times E_2\to F$ を連続2重線型写像とする．すると L は微分可能で，点 $(a_1,a_2)\in E_1\times E_2$ における微係数 $DL(a_1,a_2)\in\mathscr{L}(E_1\times E_2;F)$ は

$$DL(a_1,a_2)(x_1,x_2)=L(a_1,x_2)+L(x_1,a_2),\qquad (x_1,x_2)\in E_1\times E_2$$

で与えられる．

一般の連続 n 重線型写像についても同様な結果が得られる．

命題 5　$E,F_1,\cdots,F_n$ をノルム空間，A を E の開集合とする．写像 $f_i:A\to F_i,\ (i=1,\cdots,n)$ に対して，$f=(f_1,\cdots,f_n):A\to F_1\times\cdots\times F_n$ を $f(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$，$x\in A$ と定義する．このとき，f が点 $a\in A$ で微分可能となるため

の必要十分条件は，各 f_i, $(i=1, \cdots, n)$ が点 $a \in A$ で微分可能となることである．そして，上のような自然な対応で $\mathcal{L}(E; F_1 \times \cdots \times F_n)$ と $\mathcal{L}(E; F_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E; F_n)$ を同一視すれば

$$Df(a) = (Df_1(a), \cdots, Df_n(a))$$

となる．とくに $E=F_1=\cdots=F_n=K$ のとき $\mathcal{L}(E; F_i)=K$ と同一視すれば

$$Df(a) = \left(\frac{df_1}{dx}(a), \cdots, \frac{df_n}{dx}(a)\right)$$

となる．

定理 1 **(鎖法則)** E, F, G をノルム空間，A, B をそれぞれ E, F の開集合とする．いま写像 $f: A \to B$, $g: B \to G$ はそれぞれ点 $a \in A$ および点 $b=f(a) \in B$ で微分可能とする．すると $g \circ f: A \to G$ は点 a で微分可能で，

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

となる．

特に $B=F$ で $g: F \to G$ が連続線型写像なら

$$D(g \circ f)(a) = g \circ Df(a)$$

となる．([3], [11])

命題 6 E, F をノルム空間，A, B をそれぞれ E, F の開集合，$f: A \to B$ を同相写像とする．いま f が点 $a \in A$ で微分可能で，$Df(a): E \to F$ が線型同相写像なら，$f^{-1}: B \to A$ は $f(a)$ で微分可能で $Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$ となる．

命題 7 E, F を Banach 空間とし，$\mathrm{Iso}(E; F) \neq \phi$ とする．$\mathrm{Iso}(E; F)$ は $\mathcal{L}(E; F)$ の開集合であるが

$$h: \mathrm{Iso}(E; F) \to \mathrm{Iso}(F; E)$$

を $h(L)=L^{-1}$, $L \in \mathrm{Iso}(E; F)$ と定義すると，h は微分可能な同相写像で，h の $L_0 \in \mathrm{Iso}(E; F)$ における微係数 $Dh(L_0): \mathcal{L}(E; F) \to \mathcal{L}(F; E)$ は $Dh(L_0)(L) = -L_0^{-1} \circ L \circ L_0^{-1}$, $L \in \mathcal{L}(E; F)$ で与えられる．

定理 2 **(平均値の定理)** E, F をノルム空間，A を E の開集合，$f: A \to F$ を微分可能とする．$a, b \in A$ とし，a, b を結ぶ線分 $S=\{(1-t)a+tb;\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ は A に含まれるものとする．いま $M=\sup\{\|Df(x)\|;\ x \in S\}$ とすると

$$\|f(b)-f(a)\| \leqq M\|b-a\|$$

となる．([3], [11])

定理 3　上と同じ仮定と記号のもとで，$x_0 \in S$, $N=\sup\{\|Df(x)-Df(x_0)\|; x \in S\}$ とすると

$$\|f(b)-f(a)-Df(x_0)(b-a)\| \leqq N\|b-a\|$$

となる．([3], [11])

定理 4　E をノルム空間，F を Banach 空間，A を E の連結な開集合とする．いま $f_n : A \to F$, $(n=1, 2, \cdots)$ が微分可能で，つぎの 2 つの条件をみたすものとする．

(1)　ある点 $a \in A$ で点列 $\{f_n(a)\}$ が収束する．

(2)　A の各点 x に対して，適当な正数 r があって，x を中心とする半径 r の開球 $B_r(x)$ 上で，写像列 $\{Df_n\}$ が一様収束する．

このとき $\{f_n\}$ は $B_r(x)$ 上で一様収束し

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad g(x)=\lim_{n\to\infty} Df_n(x), \qquad x \in A$$

とおくと，$f : A \to F$ は微分可能で，$Df(x)=g(x)$，$x \in A$ が成立する．したがって f_n が C^1 級なら f も C^1 級である．([3])

E, F をノルム空間，A を E の開集合とする．いま $\mathcal{BC}^1(A; F)=\{f : A \to F;$ f は C^1 級で f と Df はともに有界$\}$ とおく．これは自然な和とスカラー倍で K 上のベクトル空間となる．さらに

$$\|f\|_1 = \max\{\sup\{\|f(x)\|;\ x \in A\},\ \sup\{\|Df(x)\|;\ x \in A\}\}$$

とおくと，つぎの命題が成立する．

命題 8　上と同じ仮定と記号のもとで $\mathcal{BC}^1(A; F)$ は上のノルム $\|f\|_1$ に関してノルム空間となる．また

$$\sup\{\|f(x)\|;\ x \in A\}+\sup\{\|Df(x)\|;\ x \in A\}$$

は $\|f\|_1$ と同値なノルムである．

さらに F が Banach 空間なら $\mathcal{BC}^1(A; F)$ も Banach 空間となる．

§2 偏　微　分

E_1, E_2, F をノルム空間，$E=E_1\times E_2$ とする．E の開集合 A とその点 $a=(a_1, a_2)$ に対して $A_1=\{x_1\in E_1;\ (x_1, a_2)\in A\}$，$A_2=\{x_2\in E_2;\ (a_1, x_2)\in A\}$ とおくと，これらは，それぞれ E_1, E_2 の開集合となる．いま，写像 $f: A\to F$ に対して，その部分写像 $A_1\ni x_1\mapsto f(x_1, a_2)\in F$ が点 $a_1\in A_1$ で微分可能のとき，f は**第1変数に関して，点 $a=(a_1, a_2)$ で偏微分可能**といい，その微係数を $D_1f(a_1, a_2)\in\mathscr{L}(E_1; F)$ と表わす．そして，これを f の a における**第1変数に関する偏微係数**という．

第2変数に関する偏微分も $A_2\ni x_2\mapsto f(a_1, x_2)\in F$ の微分として同様に定義される．f の a における**第2変数に関する偏微係数**を $D_2f(a_1, a_2)\in\mathscr{L}(E_2; F)$ で表わす．

f が A の各点で第1および第2変数に関して偏微分可能のとき，単に**偏微分可能**という．そして，$a\in A$ に対して $D_1f(a)\in\mathscr{L}(E_1; F)$ を対応させる写像 $D_1f: A\to\mathscr{L}(E_1; F)$，および同様に定義される $D_2f: A\to\mathscr{L}(E_2; F)$ をそれぞれ f の**第1および第2変数に関する偏導関数**という．

$E_1, \cdots, E_n, F$ をノルム空間，$E=E_1\times\cdots\times E_n$, A を E の開集合とする．このとき $f: A\to F$ に対して，その**第 i 変数**$(i=1, \cdots, n)$**に関する偏微分，偏導関数**も同様に定義できる．

定理 1　$E_1, \cdots, E_n, F$ をノルム空間，$E=E_1\times\cdots\times E_n$, A を E の開集合とする．このとき $f: A\to F$ が C^1 級となるための必要十分条件は，f が各変数に関して偏微分可能で，その偏導関数 $D_if: A\to\mathscr{L}(E_i; F)$, $(i=1, \cdots, n)$ がすべて連続となることである．そして，各 $a\in A$ に対して

$$Df(a)(t_1, \cdots, t_n)=\sum_{i=1}^{n} D_if(a)t_i, \qquad (t_1, \cdots, t_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$$

が成立する．([3], [11])

例 1　$E_1=\cdots=E_n=K$ とすると，$E=K^n$ となる．さらに $F=K$ とすると，$E=K^n$ の開集合 A で定義された関数 $f: A\to K$ の点 $a\in A$ における第 i 変数

に関する偏微分 $D_i f(a):K\to K$ は $D_i f(a)t=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)t$, $t\in K$ で与えられる．すなわち，$\mathcal{L}(K;K)=K$ と同一視すれば，$D_i f(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$（普通の偏微分）となる．

例 2　$E_1=\cdots=E_n=K$, $E=E_1\times\cdots\times E_n=K^n$ とし，さらに $F_1=\cdots=F_m=K$, $F=F_1\times\cdots\times F_m=K^m$ とする．A を $E=K^n$ の開集合とし，$f_i:A\to F_i=K$, $(i=1,\cdots,m)$，$f=(f_1,\cdots,f_m):A\to F=F_1\times\cdots\times F_m$ とする．このとき，$Df(a):K^n\to K^m$ はつぎの公式で与えられる．

$$Df(a)(t_1,\cdots,t_n)=\left(\sum_{j=1}^n D_j f_1(a)t_j,\cdots,\sum_{j=1}^n D_j f_m(a)t_j\right)$$
$$=\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a)t_j,\cdots,\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)t_j\right),\qquad (t_1,\cdots,t_n)\in K^m$$

したがって K^n と $\underline{K}^n$, K^m と $\underline{K}^m$ を同一視して考えると，$Df(a):\underline{K}^n\to\underline{K}^m$ の行列は，f の点 $a\in A$ における **Jacobi 行列** $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)$, $(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ と一致する．

§3　高次微分

E, F を K 上のノルム空間とし，A を E の開集合とする．写像 $f:A\to F$ は微分可能で，その導関数 $Df:A\to\mathcal{L}(E;F)$ が，さらに点 $a\in A$ で微分可能のとき，f は a で **2 回微分可能**といい，その微係数を $D(Df)(a)=D^2f(a):E\to\mathcal{L}(E;F)$ で表わす．そしてこれを f の a における**第 2 次微係数**という．

$\mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;F))=\mathcal{L}^2(E;F)$ と同一視すると，$D^2f(a)\in\mathcal{L}^2(E;F)$ と考えられる．

$f:A\to F$ が A の各点で 2 回微分可能のとき，f は **2 回微分可能**といい，$D^2f:A\to\mathcal{L}^2(E;F)$ を f の**第 2 次導関数**という．これが連続のとき，f は C^2 **級**という．

以下同様にして，自然数 $r\geqq 1$ に対して，r **回微分可能**，r **次微係数** $D^rf(a)$

$\in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}^{r-1}(E;F))=\mathcal{L}^r(E;F)$, **$r$ 次導関数** $D^rf:A\to\mathcal{L}^r(E;F)$, **$C^r$ 級**などの概念が定義される.

すべての r に関して C^r 級のとき, **C^∞ 級**という. また, 連続写像は **C^0 級**といい, $D^0f=f$ と定義する.

$E=K$ のとき, $\mathcal{L}(K;F)=F$ と同一視することができるが, これから帰納的に $\mathcal{L}^r(K;F)=F$ と同一視できる. さらに $F=K$ のとき, $D^rf(a)\in\mathcal{L}^r(K;K)$ はこの同一視によって普通の微係数 $\dfrac{d^rf}{dx^r}(a)\in K$ と一致することがわかる.

定理 1 E,F をノルム空間, A を E の開集合とする. いま写像 $f:A\to F$ が点 $a\in A$ で r 回微分可能なら, その r 次微係数 $D^rf(a)\in\mathcal{L}^r(E:F)$ は対称である. すなわち任意の置換 $\sigma\in S_r$ に対して

$$D^rf(a)(x_1,\cdots,x_r)=D^rf(a)(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(r)}),$$
$$(x_1,\cdots,x_r)\in E^r=E\times\cdots\times E\quad(r\text{ 個の直積})$$

となる.

命題 1 (1) 定値写像 $f:A\to F$ は C^∞ 級で, $D^rf=0$, $r\geqq1$ となる. ここで A はノルム空間 E の開集合, F はノルム空間とする.

(2) 連続線型写像 $L:E\to F$ は C^∞ 級で, $D^rL=0$, $r\geqq2$.

(3) $E_1,\cdots,E_n,F$ をノルム空間, $L:E_1\times\cdots\times E_n\to F$ を連続 n 重線型とすると, L は C^∞ 級で, $D^rL=0$, $r\geqq n+1$.

命題 2 E,F をノルム空間, A を E の開集合とする. いま $f,g:A\to F$ を C^r 級写像, $\lambda\in K$ とすると, $f+g,\lambda f:A\to F$ はともに C^r 級で

$$D^r(f+g)=D^rf+D^rg,\qquad D^r(\lambda f)=\lambda D^rf$$

となる.

命題 3 $E,F_1,\cdots,F_n$ をノルム空間, A を E の開集合とする. 写像 $f_i:A\to F_i$, $(i=1,\cdots,n)$ に対して $f=(f_1,\cdots,f_n):A\to F_1\times\cdots\times F_n$ とする. このとき f が点 a で r 回微分可能となるための必要十分条件は, 各 f_i, $(i=1,\cdots,n)$ が点 a で r 回微分可能となることである. そして, このとき $\mathcal{L}^p(E;F_1\times\cdots\times F_n)$ と $\mathcal{L}^p(E;F_1)\times\cdots\times\mathcal{L}^p(E;F_n)$ を自然に同一視すると, $D^rf(a)=(D^rf_1(a),\cdots,D^rf_n(a))$ となる.

Leibniz の公式　E, F_1, F_2, G をノルム空間，A を E の開集合，$L: F_1\times F_2\to G$ を連続2重線型写像とする．いま，$L(y_1, y_2)=y_1. y_2$，$(y_1, y_2)\in F_1\times F_2$ とあらわし，$f_1: A\to F_1$，$f_2: A\to F_2$ に対して，$f_1. f_2: A\to G$ を $(f_1. f_2)(x)=f_1(x). f_2(x)$，$x\in A$ と定義する．いま f_1, f_2 が C^r 級とすると，その積 $f_1. f_2$ も C^r 級で

$$D^r(f_1. f_2)(a)=\sum_{0\leqq q\leqq r}\binom{r}{q}D^q f_1(a). D^{r-q}f_2(a),\qquad a\in A$$

となる．ここで $\binom{r}{q}=\dfrac{r!}{q!(r-q)!}$ であって，$D^q f_1(a). D^{r-q}f_2(a)(x_1, \cdots, x_r)=D^q f_1(a)(x_1, \cdots, x_q). D^{r-q}f_2(a)(x_{q+1}, \cdots, x_r)$，$(x_1, \cdots, x_r)\in E^r=E\times\cdots\times E$ (r 個の直積)である．

証明　$r=1$ のときは§1命題4,5および鎖法則(§1定理1)からわかる．すなわち $D(f_1. f_2)(a)=f_1(a). Df_2(a)+Df_1(a). f_2(a)$，$a\in A$ となる．ここで $(f_1(a). D_2 f(a))(x)=f_1(a). D_2 f(a)(x)$，$(Df_1(a). f_2(a))(x)=D_1 f_1(a)(x). f_2(a)$，$x\in E$ である．あとは r に関する帰納法で証明できる．▮

Leibniz の公式とつぎの合成写像の微分公式については Abraham-Robbin: Transversal Mappings and Flows, Benjamin (1967) を参照されたい．

さて鎖法則の一般化としてつぎの定理がある．

合成写像の微分公式　E, F, G をノルム空間，A, B をそれぞれ E, F の開集合，$f: A\to B$，$g: B\to G$ を C^r 級とする．このとき合成写像 $g\circ f: A\to G$ は C^r 級で，その導関数はつぎの式で与えられる．

$$D^r(g\circ f)(a)=\sum_{1\leqq q\leqq r}\ \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_q=r\\ i_1>0,\cdots,i_q>0}}\sigma_r(i_1, \cdots, i_q)D^q g(f(a))D^{i_1}f(a)\cdots D^{i_q}f(a),$$

$$a\in A$$

ここで，$\sigma_r(i_1, \cdots, i_q)$ は適当な整数であって，$D^q g(f(a))D^{i_1}f(a)\cdots D^{i_q}f(a): E^r\to G$ はつぎの式で与えられる．

$$\begin{aligned}&D^q g(f(a))D^{i_1}f(a)\cdots D^{i_q}f(a)(x_1, \cdots, x_r)\\&\quad=D^q g(f(a))(D^{i_1}f(a)(x_1, \cdots, x_{i_1}), D^{i_2}f(a)(x_{i_1+1}, \cdots, x_{i_1+i_2}), \cdots),\\&\qquad\qquad(x_1, \cdots, x_r)\in E^r\end{aligned}$$

証明　r に関する帰納法である．$r=1$ のときは鎖法則から成立する．また，$\mathscr{L}(F;G)\times\mathscr{L}(E;F)\ni(L_2,L_1)\mapsto L_2\circ L_1\in\mathscr{L}(E;G)$ なる連続2重線型写像を積として，$D(g\circ f)(x)=(Dg\circ f)(x).Df(x)$，$x\in A$ を得る．これに Leibniz の公式を用い，帰納法の仮定を適用すればよい．▌

命題 4　上と同じ仮定で，さらに $B=F$，$g:F\to G$ が連続線型なら，$g\circ f$ も C^r 級で，$D^r(g\circ f)(a)=g\circ D^r f(a)$，$a\in A$ となる．

これは§1鎖法則の後半からもすぐわかるが，上の定理の系と考えてもよい．

命題 5　E,F を Banach 空間とし，$h:\mathrm{Iso}(E;F)\to\mathrm{Iso}(F;E)$ を $h(L)=L^{-1}$，$L\in\mathrm{Iso}(E;F)$ で定まる同相写像とする．すると h は C^∞ 級である．(§1命題7を参照のこと)

つぎに，高次の偏微分を定義する．いま $E_1,\cdots,E_n,F$ をノルム空間，A を $E=E_1\times\cdots\times E_n$ の開集合とする．$f:A\to F$ が第 i_1 変数に関して偏微分可能のとき，この偏導関数を $D_{i_1}f:A\to\mathscr{L}(E_{i_1};F)$ とする．これが点 $a\in A$ において，さらに第 i_2 変数に関して偏微分可能のとき，この偏微係数を $D_{i_2}D_{i_1}f(a)\in\mathscr{L}(E_{i_2};\mathscr{L}(E_{i_1};F))=\mathscr{L}(E_{i_2},E_{i_1};F)$ と表わす．そして，各点 $a\in A$ において $D_{i_2}D_{i_1}f(a)$ が定まるとき，これによって定まる写像 $D_{i_2}D_{i_1}f:A\to\mathscr{L}(E_{i_2},E_{i_1};F)$ を f の**第2次偏導関数**という．すべての i_1,i_2 にたいして第2次偏導関数 $D_{i_2}D_{i_1}f$ が定まるとき，f は**2回偏微分可能**という．

一般の $r\geqq 3$ についても，**r 次偏微係数** $D_{i_r}\cdots D_{i_1}f(a)\in\mathscr{L}(E_{i_r},\cdots,E_{i_1};F)$，**$r$ 次偏導関数** $D_{i_r}\cdots D_{i_1}f:A\to\mathscr{L}(E_{i_r},\cdots,E_{i_1};F)$，**$r$ 回偏微分可能**などが定義できる．

いま $E_1=\cdots=E_n=F=K$ とすると $\mathscr{L}(E_{i_r},\cdots,E_{i_1};F)$ は自然に K と同一視できる．そしてこの同一視によって，$D_{i_r}\cdots D_{i_1}f(a)$ と普通の偏微係数 $\dfrac{\partial^r f(a)}{\partial x_{i_r}\cdots\partial x_{i_1}}$ が対応する．すなわち，つぎの式が成り立つ．

$$D_{i_r}\cdots D_{i_1}f(a)(1,\cdots,1)=\frac{\partial^r f(a)}{\partial x_{i_r}\cdots\partial x_{i_1}}$$

定理 2　$E_1,\cdots,E_n,F$ をノルム空間，A を $E=E_1\times\cdots\times E_n$ の開集合とする．このとき写像 $f:A\to F$ が C^r 級となるための必要十分条件は，f が r 回偏微分

可能で，その r 次までの偏導関数がすべて連続となることである．([3], [11])

そして，このとき，任意の置換 $\sigma \in S_r$ に対して

$$D_{i_{\sigma(r)}} \cdots D_{i_{\sigma(1)}} f(a)(x_{i_{\sigma(r)}}, \cdots, x_{i_{\sigma(1)}}) = D_{i_r} \cdots D_{i_1} f(a)(x_{i_r}, \cdots, x_{i_1}),$$
$$(x_{i_r}, \cdots, x_{i_1}) \in E_{i_r} \times \cdots \times E_{i_1}$$

が成立する．

さらに $x^{(k)} = (x_1{}^{(k)}, \cdots, x_n{}^{(k)}) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, $(k=1, \cdots, r)$ として

$$D^r f(a)(x^{(r)}, \cdots, x^{(1)}) = \sum_{i_1, \cdots, i_r = 1}^{n} D_{i_r} \cdots D_{i_1} f(a)(x_{i_r}{}^{(r)}, \cdots, x_{i_1}{}^{(1)})$$

が成立する．

特に $E_1 = \cdots = E_n = F = K$ ならば

$$D^r f(a)(x^{(r)}, \cdots, x^{(1)}) = \sum_{i_1, \cdots, i_r = 1}^{n} \frac{\partial^r f(a)}{\partial x_{i_r} \cdots \partial x_{i_1}} x_{i_r}{}^{(r)} \cdots x_{i_1}{}^{(1)}$$

が成立する．

定理 3 (**Taylor**)　E, F をノルム空間，A を E の開集合，$f: A \to F$ を C^r 級とする．いま $a, a+h \in A$ で，a と $a+h$ を結ぶ線分 $S = \{a+th;\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ が A に含まれているものとする．いま f が S の各点で$(r+1)$回微分可能で，$\sup\{\|D^{r+1}f(x)\|;\ x \in S\} = M$ とすると

$$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h - \frac{D^2 f(a)}{2!}h^2 - \cdots - \frac{D^r f(a)}{r!}h^r\|$$
$$\leqq \frac{M\|h\|^{r+1}}{(r+1)!}$$

が成立する．ただし $h^k = (h, \cdots, h) \in E^k$ とする．([3], [11])

E, F をノルム空間，A を E の開集合とする．いま，A から F への写像 f に対して，$D^0 f = f$, $D^1 f$, $\cdots$, $D^r f$ がすべて存在して，これらがすべて連続で有界となるとき，f を C^r 有界という．そして $\|D^k f\| = \sup\{\|D^k f(x)\|;\ x \in A\}$ とし，$\|f\|_r = \max\{\|D^k f\|;\ k = 0, \cdots, r\}$ とおく．

命題 6　A から F への C^r 有界な写像全体の集合を $\mathcal{BC}^r(A; F)$ とおくと，これは自然な和とスカラー倍でベクトル空間となる．さらに $\|f\|_r$, $f \in \mathcal{BC}^r(A; F)$ は $\mathcal{BC}^r(A; F)$ のノルムとなる．これを **r ノルム**という．

また $\|f\|_r'=\sum_{k=0}^{r}\|D^kf\|$, $f\in\mathcal{BC}^r(A;F)$ も $\mathcal{BC}^r(A;F)$ のノルムとなるが，これは r ノルムと同値である．

さらに，F が Banach 空間なら，$\mathcal{BC}^r(A;F)$ も r ノルムに関して Banach 空間となる．

初めの2つは定義から容易にわかる．また最後の主張も§1定理4からすぐわかる．

§4 積　分

ここでは，主として，実数の閉区間で定義された，Banach 空間に値をとる関数の積分を取扱う．

I を実数の閉区間 $[a,b]=\{x\in\boldsymbol{R};\ a\leqq x\leqq b\}$，$F$ を Banach 空間とする．写像 $f:I\to F$ に対して，f の $x_0\in I$, $(x_0\neq a)$ における**左極限**が $v_0\in F$ であるとは，任意の正数 ε に対して，適当な正数 δ が存在して，

$$0<x_0-x<\delta \quad \text{ならば} \quad \|f(x)-v_0\|<\varepsilon$$

となるときをいう．そして，このとき $\lim_{x\to x_0-0}f(x)=v_0$ と表わす．

同様に $x_0\in I$, $(x_0\neq b)$ における f の**右極限**が $w_0\in F$ であるということも定義できる．そして，このとき $\lim_{x\to x_0+0}f(x)=w_0$ と表わす．f の左および右極限を**片側極限**という．

f の**左微分**，**右微分**，**片側微分**も同様に定義できる．

写像 $f:I\to F$ が I の各点で片側極限をもつとき，f を**方正関数**という．

命題 1　連続写像 $f:I\to F$ は方正関数である．また $F=\boldsymbol{R}$ のとき，単調関数 $f:I\to\boldsymbol{R}$ は方正である．

写像 $f:I\to F$ に対して $I=[a,b]$ の適当な分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ があって，f が開区間 (t_{j-1},t_j), $(j=1,\cdots,n)$ 上で定値となるとき，f を**階段関数**という．

定理 1　写像 $f:I\to F$ が方正関数となるための必要十分条件は，f が階段関

数 $f_n: I\to F$, $(n=1,2,\cdots)$ の一様収束の極限となることである．([3])

階段関数 $f: I\to F$ に対して，$I=[a,b]$ の分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ を $f(t)=v_j$, $t_{j-1}<t<t_j$, $(j=1,\cdots,n)$ が成立するようにとる．すると，$\sum_{j=1}^{n}(t_j-t_{j-1})v_j$ は，このような I の分割のとり方に無関係に，f だけに依存して定まる．したがってこれを $\int_a^b f$, または $\int_a^b f(t)\,dt$ と表わす．この値は F に属する．

命題 2　$f: I\to F$ を方正関数とする．いま階段関数の列 $f_n: I\to F$, $(n=1,2,\cdots)$を，$\{f_n\}$ が f に一様収束するようにとる．すると $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ は存在する．そして，これは，上のような $\{f_n\}$ のとり方に無関係に，f のみに依存して定まる．したがって，これを $\int_a^b f$, または $\int_a^b f(t)\,dt$ などと表わし，f の**積分**という．

命題 3　F, G を Banach 空間，$f: I\to F$ を方正関数，$L: F\to G$ を連続線型写像とする．このとき $L\circ f: I\to G$ も方正関数で

$$\int_a^b L\circ f = L\left(\int_a^b f\right)$$

となる．

定理 2　$f: I\to F$ を方正関数，$M=\sup\{\|f(t)\|;\ t\in I\}$ とする．このとき，つぎの不等式が成立する．

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqq \int_a^b \|f\| \leqq M(b-a) \qquad ([3])$$

写像 $f: I\to F$ に対して，連続関数 $g: I\to F$ と I の可算部分集合 B があって，$Dg(t)=f(t)$, $t\in I-B$ が成立するとき，g を f の**原始関数**という．ここで，$Dg(t)$ は g の t における微係数で $Dg(t)\in\mathcal{L}(\boldsymbol{R};F)=F$ と考えるものとする．

命題 4　$g_1, g_2: I\to F$ が $f: I\to F$ の原始関数とすると，g_1-g_2: $I\to F$ は定値写像である．([3])

定理 3　(1)　方正関数 $f: I\to F$ は原始関数をもつ．

(2)　連続写像 $f: I\to F$ に対して，$g: I\to F$ を $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $x\in I$ とおくと，g は f の原始関数である．

(3)　$f: I\to F$ を連続，$g: I\to F$ を f の原始関数とすると

$$\int_a^b f = g(b) - g(a) = [g(x)]_a^b$$

となる．([3])

定理 4　方正関数列 $g_n: I \to F$, $(n=1, 2, \cdots)$ が写像 $g: I \to F$ に一様収束するなら，g も方正関数で，$\int_a^b g_n$ は $\int_a^b g$ に収束する．([3])

定理 5　E, F を実 Banach 空間，A を E の開集合とする．$I=[a, b]$ を実数の閉区間とし $f: I \times A \to F$ を連続写像とする．すると，$g(z) = \int_a^b f(t, z)\,dt$, $z \in A$ によって定まる写像 $g: A \to F$ は連続である．

さらに f が第2変数に関して偏微分可能で，その偏導関数 $D_2 f: I \times A \to \mathcal{L}(E; F)$ が連続なら，g は C^1 級で

$$Dg(z) = \int_a^b D_2 f(t, z)\,dt, \qquad z \in A$$

となる．([3])

定理 6　(Taylor の定理の積分の形)　E, F を Banach 空間，A を E の開集合，$f: A \to F$ を C^{r+1} 級とする $(r \geqq 0)$．いま $a, a+h \in A$ で，a と $a+h$ を結ぶ線分 S は A に含まれているものとする．するとつぎの公式が成立する．

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + \cdots + \frac{D^r f(a)}{r!} h^r + R_r,$$

$$R_r = \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^r}{r!} D^{r+1} f(a+th)\,dt \right) h^{r+1}$$

ただし，$h^k = (h, \cdots, h) \in E^k$．([3])

§5　簡単なスペクトル理論

E を複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の Banach 空間，D を $\boldsymbol{C}$ の開集合とする．写像 $f: D \to E$ に対して，つぎの条件(＊)が成立するとき，f は**解析的**という．

(＊)　D の各点 λ_0 に対して，λ_0 を中心とする半径 r, $(r>0)$ の D に含まれる開円板 $B_r(\lambda_0)$ があって，この上で $f(\lambda)$ は絶対収束する $(\lambda - \lambda_0)$ のベキ級数で

表わされる．すなわち

$$\lambda \in B_r(\lambda_0) \quad ならば \quad f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^n a_n, \qquad a_n \in E,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda-\lambda_0|^n \|a_n\| < \infty$$

となる．

実数の閉区間 $I=[a,b]$ から $\boldsymbol{C}$ への連続写像 $\gamma: I \to \boldsymbol{C}$，すなわち，$\boldsymbol{C}$ の曲線が，方正関数の原始関数となるとき，これを**経路**という．そして，この方正関数を，$\gamma': I \to \boldsymbol{C}$ で表わす．特に γ が閉曲線，すなわち $\gamma(a)=\gamma(b)$ のとき，これを**回路**という．$\gamma(I) \subset D$ のとき，γ は **D の経路**，または**回路**という．

$\boldsymbol{C}$ の径路 $\gamma: I=[a,b] \to \boldsymbol{C}$ と連続写像 $f: \gamma(I) \to E$ に対して $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ を f の**径路 γ に沿っての積分**といい $\int_\gamma f(\lambda)d\lambda$ で表わす．

$\gamma_1, \gamma_2: I \to D$ を D の径路とする．いま，適当な実数の区間 $J=[\alpha,\beta]$ と連続写像 $\varphi: I \times J \to D$ があって，$\varphi(t,\alpha)=\gamma_1(t)$，$\varphi(t,\beta)=\gamma_2(t)$，$t \in I$ が成立するとき，γ_1 と γ_2 は**ホモトープ**という．γ_1, γ_2 が回路のとき，各 $\xi \in J$ に対して，$\varphi(a,\xi)=\varphi(b,\xi)$ が成立するとき，すなわち曲線 $t \mapsto \varphi(t,\xi)$ が閉曲線のとき，γ_1 と γ_2 は**閉曲線としてホモトープ**という．

Cauchy の積分定理 D を $\boldsymbol{C}$ の開集合，E を複素 Banach 空間とする．いま $f: D \to E$ が解析的とし，γ_1, γ_2 を D の回路とする．このとき，γ_1, γ_2 が閉曲線としてホモトープなら

$$\int_{\gamma_1} f(\lambda)d\lambda = \int_{\gamma_2} f(\lambda)d\lambda$$

となる．([3])

E を複素 Banach 空間，$L: E \to E$ を連続線型写像とする．$1_E: E \to E$ を恒等写像としたとき，$\lambda 1_E - L: E \to E$ が線型同相写像となるような $\lambda \in \boldsymbol{C}$ 全体の集合を $\rho(L)$ で表わし，これを L の**レゾルベント集合**という．そして $R(\lambda; L) = (\lambda 1_E - L)^{-1}$ を L の**レゾルベント**という．また，$\lambda 1_E - L$ が線型同相とならないような $\lambda \in \boldsymbol{C}$ 全体の集合を $\sigma(L)$ で表わし，これを L の**スペクトル**という．

定義から L のスペクトル $\sigma(L)$ は L のレゾルベント集合 $\rho(L)$ の補集合であ

る．また E が有限次元のときは，L のスペクトル $\sigma(L)$ は L の固有値全体の集合である．

命題 1 上と同じ仮定と記号のもとで，L のレゾルベント集合 $\rho(L)$ は $\boldsymbol{C}$ の開集合となる．そして $\lambda \in \rho(L)$ に対して $R(\lambda; L) \in \mathscr{L}(E; E)$ を対応させる写像 $R(\cdot; L) : \rho(L) \to \mathscr{L}(E; E)$ は解析的である．([4])

命題 2 L のスペクトル $\sigma(L)$ は空でないコンパクト集合である．したがって $r(L) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(L)\}$ は有限であるが，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|L^n\|} = r(L)$$

が成立する．([4])

この $r(L)$ を L の**スペクトル半径**という．

L のスペクトル $\sigma(L)$ を含む開集合で定義された複素数値解析関数全体の集合を $\mathscr{F}(L)$ とする．

$f \in \mathscr{F}(L)$ に対して $\boldsymbol{C}$ の開集合 U をつぎの 3 つの条件をみたすようにとる．

(1) $U \supset \sigma(L)$

(2) U とその境界 $\mathrm{Bd}\, U$ は f の定義域に含まれる．

(3) $\mathrm{Bd}\, U$ は有限個の自分自身交わらない回路 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ からなり，その向きはその内部 U を左に見るものとする．

このような U が存在することはすぐわかるが，これを用いて

$$f(L) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(\lambda) R(\lambda; L)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Bd}\, U} f(\lambda) R(\lambda; L)\, d\lambda$$

とおくと，$f(L) \in \mathscr{L}(E; E)$ であって，Cauchy の積分定理および命題 1 から，つぎのことがわかる．

命題 3 この $f(L)$ は f と L だけによって定まり，上のような U のとり方に無関係である．([4])

命題 4 $f, g \in \mathscr{F}(L)$，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$ とすると，つぎの性質が成立する．

(1) $(\alpha f + \beta g)(L) = \alpha f(L) + \beta g(L)$

(2) f と g の積を fg とおくと，$(fg)(L) = f(L) \circ g(L)$，したがって，$f(L) \circ g(L) = g(L) \circ f(L)$ である．特に $f(L)$ は L と可換である．

(3)　$\sigma(L)$ の近傍で $f(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$，$\alpha_n\in\boldsymbol{C}$ とすると

$$f(L)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n L^n$$

となる．([4])

定理 1　$f\in\mathscr{F}(L)$ ならば，$f(\sigma(L))=\sigma(f(L))$ である．([4])

定理 2　$f\in\mathscr{F}(L)$，$g\in\mathscr{F}(f(L))$ とすると，f と g の合成関数 $g\circ f$ は $\mathscr{F}(L)$ に属し $(g\circ f)(L)=g(f(L))$ となる．([4])

$\sigma(L)$ の部分集合 σ が $\sigma(L)$ の開集合かつ閉集合となるとき，これを $\sigma(L)$ の**スペクトル集合**という．

いま σ が $\sigma(L)$ のスペクトル集合とすると，σ および $\sigma(L)-\sigma$ は，互に交わらない $\boldsymbol{C}$ の閉集合となる．したがって，σ 上で 1，$\sigma(L)-\sigma$ 上で 0 となるような解析関数 $f\in\mathscr{F}(L)$ が存在する．そこで $E(\sigma;L)=f(L)$ とおくと，これは，この f の取り方に無関係に，σ と L だけに依存して定まることがわかる．

一般の $\boldsymbol{C}$ の部分集合 σ に対して，$\sigma\cap\sigma(L)$ が $\sigma(L)$ のスペクトル集合となるとき，$E(\sigma;L)=E(\sigma\cap\sigma(L);L)$ とおく．するとつぎの定理が成立する．

定理 3　$f\in\mathscr{F}(L)$ とし，τ が $\sigma(f(L))$ のスペクトル集合とすると，$\sigma(L)\cap f^{-1}(\tau)$ は $\sigma(L)$ のスペクトル集合で

$$E(\tau;f(L))=E(f^{-1}(\tau);L)$$

が成立する．([4])

つぎに $E(\sigma;L):E\to E$ の像空間を E_σ とおく．すると命題4(2)から E_σ は L 不変かつ $f(L)$ 不変 $(f\in\mathscr{F}(L))$ となる．すなわち $L(E_\sigma)\subset E_\sigma$，$f(L)(E_\sigma)\subset E_\sigma$，$(f\in\mathscr{F}(L))$ となる．そこで $L_\sigma=L|E_\sigma:E_\sigma\to E_\sigma$，$f(L)_\sigma=f(L)|E_\sigma:E_\sigma\to E_\sigma$，とおくと，つぎの定理が成立する．

定理 4　σ を $\sigma(L)$ のスペクトル集合とすると，$\sigma(L_\sigma)=\sigma$ となる．そして，$f\in\mathscr{F}(L)$ なら $f\in\mathscr{F}(L_\sigma)$ で，$f(L)_\sigma=f(L_\sigma)$ となる．([4])

最後に $\boldsymbol{C}$ の部分集合 σ と正数 ε に対して，σ からの距離が ε より小となる $\boldsymbol{C}$ の点全体の作る開集合を $S(\sigma;\varepsilon)$ とおくと，つぎの命題が成立する．

命題 5　$L:E\to E$ を連続線型写像とする．任意の正数 ε に対して，適当な

正数 δ が存在して，$\|L_1-L\|<\varepsilon$ となる任意の連続線型写像 $L_1: E\to E$ に対して

$$\sigma(L_1)\subset S(\sigma(L);\varepsilon)$$

が成立する．([4])

第1部へのあとがき

ここに述べたような事柄についての参考書は沢山あるし，良書も多いが，ここでは，そのごく一部だけをあげて読者の参考にしよう．名前の後のかっこの中の番号は，すぐ後にある参考文献の中の番号である．

第1章集合については亀谷 [6]，松坂 [8] などを参考にされるとよい．第2章位相については，Bourbaki [2]，Dieudonné [3]，Lang [5]，亀谷 [6]，河田・三村 [7]，松坂 [8]，Schwartz [11] などがある．第3章ベクトル空間については，Bourbaki [1]，斉藤 [9]，佐竹 [10] などがある．そして実 Jordan 標準形については占部 [12] を参照されるとよい．

第4章ノルム空間，および第5章ノルム空間における微積分については，Dieudonné [3]，Lang [5]，Schwartz [11] がある．そして，第5章§5簡単なスペクトル理論は，Dunford-Schwartz [4] の第VII章§3と§6の一部分である．

以上多くの文献をあげたが，Dieudonné [3]，または Schwartz [11] が基本的である．ただ Dieudonné では Banach 空間での微積分を取りあつかうが，Schwartz [11] にあるように，ノルム空間でも多くの理論が成立するので，この第1部のような構成にしたわけである

参考文献

[1] Bourbaki: Eléments de mathématique, Hermann, Algebré, Chapitre 2 (1962), Chapitre 3 (1958), Chapitre 6 et 7 (1964).
(邦訳　ブルバキ，数学原論，代数2，代数3，代数5，東京図書)．

[2] Bourbaki: Eléments de mathématique, Hermann, Topologie générale, Chapitre 1 et 2 (1965), Chapitre 9 (1958).
(邦訳　ブルバキ，数学原論，位相1，位相4，東京図書)．

[3] Dieudonné: Foundations of Modern Analysis, Academic Press (1960).

(邦訳 ディュドネ: 現代解析の基礎 1, 2, 東京図書).
[4] Dunford-Schwartz: Linear Operators, Part I, Interscience Publishers (1967).
[5] Lang: Analysis II, Addison-Wesley (1969).
[6] 亀谷俊司: 集合と位相, 朝倉書店 (1962).
[7] 河田敬義・三村征雄: 現代数学概説 II, 岩波書店 (1965).
[8] 松坂和夫: 集合・位相入門, 岩波書店 (1968).
[9] 斉藤正彦: 線型代数入門, 東大出版 (1966).
[10] 佐竹一郎: 線型代数学, 裳華房 (1974).
[11] Schwartz: Cours d'analyse 1, 2, Hermann (1967).
(邦訳 シュヴァルツ: 解析学 1〜7, 特に 1, 2, 3, 6, 東京図書).
[12] 占部実: 非線型問題, 共立出版 (1957).

第2部　存在定理と安定多様体の理論

ここでは，いろいろな存在定理と微分可能多様体の一般論，そして微分可能な力学系の定義，微分可能な力学系の空間などについて簡単な解説を行う．そして，微分可能な力学系の理論の中で重要な役割りを占める安定多様体について述べることにする．

またここでは，証明はできるだけ詳しく述べることにするが，場合によっては，繰返しをさけるため，簡単な指針だけにとどめる場合もある．第2部から読み始める人のために，記号などについて繰返し簡単な説明を加えることもあるが，できるだけ第1部を参照しながら読むことが望ましい．特に第6章は第1部と密接に関連しているから，第6章を読んでいる間に第1部の多くの部分の復習ができることになる．

第6章　存　在　定　理

§1　C^r 写像の空間

ここでは E, F, G, H はノルム空間，X は位相空間，Y は F の部分集合とする．

連続写像を **C^0 写像**という．さらにその像が距離空間の有界な部分集合となるとき，これを **C^0 有界**という．位相空間 X からノルム空間 F への C^0 有界な写像全体の集合を $\mathcal{BC}^0(X;F)$ とすると，これは自然な和とスカラー倍によってベクトル空間となる．さらに $f\in\mathcal{BC}^0(X;F)$ に対して

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|;\ x\in X\}$$

とおくと，これは $\mathcal{BC}^0(X;F)$ のノルムとなる．したがって $\mathcal{BC}^0(X;F)$ はノルム空間となる．これは X から F への有界な写像全体の作るノルム空間 $\mathcal{B}(X;F)$ の閉部分ベクトル空間である．F が Banach 空間なら $\mathcal{B}(X;F)$ が Banach 空間となるから $\mathcal{BC}^0(X;F)$ も Banach 空間となる(第4章§1命題8，第2章定理5を参照のこと)．

写像 $f: X\to F$ が **C^r 級**，または **C^r 写像**($r\geqq 1$)であるとは f がつぎの2つの条件をみたすときをいう．

(1)　X はノルム空間 E の部分集合で，$X\subset\overline{\mathrm{Int}\,X}$，すなわち X は X の内部 $\mathrm{Int}\,X$ の閉包 $\overline{\mathrm{Int}\,X}$ に含まれる．

(2)　f は X を含む E の開集合から F への C^r 級写像に拡張できる．

C^r 写像 $f: X\to F$ に対して，(2)から X を含む開集合 U と f の拡張 $\tilde{f}: V\to F$ で C^r 級のものが存在する．E から F への連続 k 重線型写像全体の作るノ

ルム空間を $\mathcal{L}^k(E;F)$ とすると，$\tilde{f}$ の k 次導関数 $D^k\tilde{f}:U\to\mathcal{L}^k(E;F)$, $(k=0,\cdots,r)$ は存在して連続である(ただし $D^0\tilde{f}=\tilde{f}:U\to\mathcal{L}^0(E;F)=F$ とする)．また(1)から X の点 x に対して Int X の点列 $\{x_n\}$ で $n\to\infty$ のとき $x_n\to x$ となるものが存在する．すると

$$\lim_{n\to\infty} D^kf(x_n)=\lim_{n\to\infty} D^k\tilde{f}(x_n)=D^k\tilde{f}(x), \qquad k=0,\cdots,r$$

となるから，$D^k\tilde{f}(x)$ は f の拡張 $\tilde{f}$ の取り方に無関係である．したがって，これを $D^rf(x), x\in X$ と表わす．

上の定義は明らかに X が E の開集合の場合の定義の拡張である．

$f:X\to F$ が C^r 写像($r\geqq 0$)のとき，f が **C^r 有界**とは，すべての $k=0,\cdots,r$ に対して $D^kf:X\to\mathcal{L}^k(E;F)$ が有界のときをいう．X から F への C^r 有界な写像全体の集合を $\mathcal{BC}^r(X;F)$ とおくと，これは自然な和とスカラー倍でベクトル空間となる．そして $f\in\mathcal{BC}^r(X;F)$ に対して $\|D^kf\|=\sup\{\|D^kf(x)\|;\ x\in X\}$, $\|f\|_r=\max\{\|D^kf\|;\ k=0,\cdots,r\}$ とおくと，$\|f\|_r$ は $\mathcal{BC}^r(X;F)$ のノルムとなる．(これを **r ノルム**という.) したがって $\mathcal{BC}^r(X;F)$ はノルム空間となる．これは $\mathcal{BC}^0(X;F)$ の自然な拡張である，さらに，X が E の開集合で F が Banach 空間なら $\mathcal{BC}^r(X;F)$, $(r\geqq 1)$ も Banach 空間となる(第5章§3命題6)．

r ノルムの代りに $\sum_{k=0}^{r}\|D^kf\|$ を用いても同様であるが，これが $\|f\|_r$ と同値であることは，つぎの不等式からわかる．

$$\|f\|_r\leqq\sum_{k=0}^{r}\|D^kf\|\leqq(r+1)\|f\|_r \qquad \text{(第4章§1命題7)}$$

命題 1 (1) $f\in\mathcal{BC}^r(X;F)$ に対して $\|f\|_0=\|f\|$ で，

$$\|f\|_k=\max\{\|f\|,\|Df\|_{k-1}\}, \qquad k=1,\cdots,r$$

となる．

(2) $f\in\mathcal{BC}^r(X;F)$, $(r\geqq 1)$ に対してその導関数 $Df\in\mathcal{BC}^{r-1}(X;\mathcal{L}(E;F))$ を対応させる写像 $D:\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{BC}^{r-1}(X;\mathcal{L}(E;F))$ は連続線型写像である．

証明 (1)は定義から明らか．また第5章§1命題3から D は線型で，第4章§1命題4と上の(1)から D は連続である．∎

命題 2　C^r 写像 $f: X\to Y$, $g: Y\to G$, $(r\geqq 1)$に対してつぎの性質が成立する.

(1)　$Df: X\to\mathscr{L}(E;F)$, $Dg: Y\to\mathscr{L}(F;G)$ が C^{r-1} 有界ならば, $D(gf)$は C^{r-1} 有界である.

(2)　Df が C^{r-1} 有界で g が C^r 有界なら, $gf: X\to G$ は C^r 有界で $M_r(f)=\max\{1, (\|Df\|_{r-1})^r\}$ とおくと, 適当な定数 A があって $\|gf\|_r\leqq A\|g\|_r M_r(f)$ となる. (A は f, g に無関係.)

特に f, g が C^r 有界なら, gf も C^r 有界である.

証明　合成写像の微分公式(第5章§3)から

$$D^k(gf)(x)=\sum_{1\leqq q\leqq k}\ \sum_{\substack{i_1+\cdots+i_q=k\\ i_1>0,\cdots,i_q>0}}\sigma_k(i_1,\cdots,i_q)D^q g(f(x))D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_q}f(x)$$

($\sigma_k(i_1,\cdots,i_q)$は定数), $x\in X$ となる. したがって $1\leqq k\leqq r$ に対して適当な定数 $a_k\geqq 0$ があって

$$\|D^k(gf)\|\leqq a_k\|Dg\|_{k-1}M_k(f)$$

が成立する. これから(1)がでる. また g が有界なら gf も有界で $\|gf\|\leqq\|g\|$ となり, 上の不等式とあわせて(2)がわかる. ▌

$r\geqq 0$ として $\mathscr{BC}^r(X;Y)=\{f\in\mathscr{BC}^r(X;F);\ f(X)\subset Y\}$ とおく. するとつぎの補題が成立する.

補題 1　(1)　X がコンパクトで Y が F の開集合なら, $\mathscr{BC}^r(X;Y)$は $\mathscr{BC}^r(X;F)$の開集合である.

(2)　X がコンパクトで Y が F の閉球なら $\mathscr{BC}^r(X;Y)\subset\overline{\mathrm{Int}\,\mathscr{BC}^r(X;Y)}$ が成立する.

証明　Y が F の開集合とする. このとき $f\in\mathscr{BC}^r(X;Y)$に対して, f を中心とする適当な半径の $\mathscr{BC}^r(X;F)$の開球が $\mathscr{BC}^r(X;Y)$に含まれることをいえば, $\mathscr{BC}^r(X;Y)$が$\mathscr{BC}^r(X;F)$の開集合となることが証明されたことになる.

Y が開集合だから, その補集合 $Y^c=F-Y$ は F の閉集合である. また $f(X)\subset Y$ だから $f(X)\cap Y^c=\phi$ となる. X がコンパクトだから, $f(X)$はコンパクトである(第2章§6 定理1).

$d(\cdot, Y^c): F \to \boldsymbol{R}$ を F の点 y に対して y と Y^c の間の距離 $d(y, Y^c)$ を対応させる写像とすると，これは連続である(第2章§1命題2). $f(X)$はコンパクトだから $d(\cdot, Y^c)$は $f(X)$の上で最小値をとる(第2章§6定理8). この最小値をとる点を $y_0 \in f(X)$ とする.

このとき $d(y_0, Y^c)>0$ をいう. いま, かりに $d(y_0, Y^c)=0$ とすると $y_0 \in \bar{Y}^c$ となる(第2章§1命題2). しかるに Y^c は閉集合だから $\bar{Y}^c = Y^c$, ゆえに $y_0 \in Y^c$ となる. したがって, $f(X) \cap Y^c \ni y_0$ となり $f(X) \cap Y^c = \phi$ に反する.

いま $\delta = d(f(X), Y^c) = d(y_0, Y^c) > 0$ とおく. すると, f を中心とする半径 δ の開球は, $\mathcal{BC}^r(X; Y)$に含まれる. 実際 $g \in \mathcal{BC}^r(X; F)$を $\|g-f\|_r < \delta$ にとると, $z \in Y^c$, $x \in X$ として,

$$\|z-g(x)\| \geqq \|z-f(x)\| - \|f(x)-g(x)\| \geqq d(f(X), Y^c) - \|f-g\|_r > 0$$

となり, $g(X) \cap Y^c = \phi$, すなわち $g(X) \subset Y$ となる.

つぎに, 後半の証明のため, Y は点 $y_0 \in F$ を中心とする半径 δ, $(\delta>0)$の閉球とする. そして y_0 を中心として半径 δ の開球を $\mathring{Y}$ とすると, $\mathcal{BC}^r(X; \mathring{Y})$ は(1)から $\mathcal{BC}^r(X; F)$の開集合であって, $\mathcal{BC}^r(X; \mathring{Y}) \subset \mathcal{BC}^r(X; Y)$となる. したがって, $\mathcal{BC}^r(X; \mathring{Y}) \subset \mathrm{Int}\, \mathcal{BC}^r(X; Y)$となる(第2章§2定理1).

いま, $f \in \mathcal{BC}^r(X; Y)$に対して, $f_n(x) = (1-1/n)(f(x)-y_0)+y_0$, $(n=1, 2, \cdots)$とおくと, $f_n \in \mathcal{BC}^r(X; \mathring{Y}) \subset \mathrm{Int}\, \mathcal{BC}^r(X; Y)$で, 写像 $c: X \to Y$ を $c(x) = y_0$, $x \in X$ と定義すると, $\|f_n - f\|_r = (1/n)\|f-c\|_r$ となる. したがって, $n \to \infty$ のとき, $f_n \to f$ となる. すなわち $f \in \overline{\mathrm{Int}\mathcal{BC}^r(X; Y)}$となる. ▮

C^r 写像 $f: X \to F$, $(r \geqq 0)$が X の部分集合 Z で**一様に C^r 級**とは, 任意の正数 ε に対して適当な正数 δ があって $\|x-z\| < \delta$, $x \in X$, $z \in Z$ なら $\|D^k f(x) - D^k f(z)\| < \varepsilon$, $(k=0, \cdots, r)$が成立するときをいう.

$X=Z$ のとき, f を単に**一様 C^r 級**という. 定義から一様 C^0 級とは一様連続と同じであり, f が一様 C^r 級とは, すべての $k=0, \cdots, r$ に対して, $D^k f$ が一様連続となることである.

補題 2　$f: X \to F$ が連続で, Z が X のコンパクトな部分集合なら, f は Z で一様 C^0 級である.

証明　これは第2章§6定理9の一般化であって，証明も同様である．

いま f が Z で一様に C^0 級でないとする．すると適当な正数 ε_0 があって，任意の正数 δ に対して，適当な点 $x_\delta \in X$, $z_\delta \in Z$ があって，$\|x_\delta - z_\delta\| < \delta$ かつ $\|f(x_\delta) - f(z_\delta)\| \geqq \varepsilon_0$ となる．いま $\delta = 1/n$, $(n=1, 2, \cdots)$ に対する x_δ, z_δ をそれぞれ x_n, z_n とすると $x_n \in X$, $z_n \in Z$ で $\|x_n - z_n\| < 1/n$, かつ $\|f(x_n) - f(z_n)\| \geqq \varepsilon_0$ となる．

Z はコンパクトだから，$\{z_n\}$ の適当な部分列 $\{z_{n_k}\}$ をとれば，$k \to \infty$ のとき $z_{n_k} \to p \in Z$ とできる(第2章§6定理6)．すると，$\|x_{n_k} - z_{n_k}\| < 1/n_k$ から $k \to \infty$ として $x_{n_k} \to p$ となる．

一方，$\|f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})\| \geqq \varepsilon_0$ と f の連続性から，$k \to \infty$ として $0 = \|f(p) - f(p)\| \geqq \varepsilon_0$ を得るが，これは $\varepsilon_0 > 0$ に矛盾する．▌

補題 3　X を距離空間とする．いま一様連続な写像の列 $f_n : X \to F$, $(n=1, 2, \cdots)$ が $f : X \to F$ に一様収束するものとする．すると f は一様連続である．

証明　連続写像の一様収束の極限が連続であるという定理(第2章§8定理4)の証明と同様である．

ε を任意の正数とする．f_n は f に一様収束するから，適当な番号 N があって，$n \geqq N$ なら $\|f_n - f\| < \varepsilon/3$ とできる．特に $\|f_N(x) - f(x)\| < \varepsilon/3$, $x \in X$ となる．また f_N は一様連続だから適当な正数 δ があって，$\|x - x'\| < \delta$ なら $\|f_N(x) - f_N(x')\| < \varepsilon/3$ となる．したがって，$\|x - x'\| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x')\| &\leqq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(x')\| + \|f_N(x') - f(x')\| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\end{aligned}$$

となる．▌

ノルム空間 E の部分集合 X の任意の2点 x_1, x_2 に対して，それらを結ぶ線分 $\{(1-t)x_1 + tx_2;\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ が X に含まれるとき，X を**凸集合**という．

命題 3　(1)　写像 $f : X \to F$ が C^r 級$(r \geqq 0)$で，Z が X のコンパクト部分集合とすると，f は Z で一様 C^r 級である．

(2)　写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to G$ がともに一様 C^r 級$(r \geqq 0)$で，$r \geqq 1$ のときはさらに Df, Dg が C^{r-1} 有界とする．このとき，これらの合成 $gf : X \to G$ は

一様 C^r 級である.

(3) $f: X\to F$ が C^r 有界($r\geqq 1$)で, X がノルム空間 E の凸集合なら, f は一様 C^{r-1} 級である.

(4) X から F への C^r 有界な一様 C^r 級写像($r\geqq 0$)全体の集合を $\mathcal{UBC}^r(X;F)$ とおくと, これは $\mathcal{BC}^r(X;F)$ の閉部分ベクトル空間である. したがって, F が Banach 空間であって $r=0$ のとき, または $r\geqq 1$ で X がノルム空間 E の開集合のとき, $\mathcal{UBC}^r(X;F)$ は Banach 空間である.

証明 (1)は補題2から明らか.

(2)の $r=0$ のときは, 一様連続な写像の合成は一様連続ということであるが, これは定義からすぐわかる.

$r\geqq 1$ のときは合成写像の微分公式から $1\leqq k\leqq r$ として

(a) $$\|D^k(gf)(x)-D^k(gf)(x')\|$$
$$\leqq \sum_{1\leqq q\leqq k}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_q=k\\ i_1>0,\cdots,i_q>0}}\sigma_k(i_1,\cdots,i_q)$$
$$\times\|D^qg(f(x))D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_q}f(x)-D^qg(f(x'))D^{i_1}f(x')\cdots D^{i_q}f(x')\|$$

また

$$D^qg(f(x))D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_q}f(x)-D^qg(f(x'))D^{i_1}f(x')\cdots D^{i_q}f(x')$$
$$=(D^qg(f(x))-D^qg(f(x')))D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_q}f(x)$$
$$+D^qg(f(x'))(D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_q}f(x)-D^{i_1}f(x')\cdots D^{i_q}f(x'))$$
$$=(D^qg(f(x))-D^qg(f(x')))D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_q}f(x)$$
$$+D^qg(f(x'))\left\{\sum_{j=1}^{q}(D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_j}f(x)D^{i_{j+1}}f(x')\cdots D^{i_q}f(x')\right.$$
$$\left.-D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_{j-1}}f(x)D^{i_j}f(x')\cdots D^{i_q}f(x'))\right\}$$

したがって, 適当な定数 $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ があって, $M_k(f)=\max\{1,(\|Df\|_{k-1})^k\}$ とおくと,

(b) $$\|D^qg(f(x))D^{i_1}f(x)\cdots D^{i_q}f(x)-D^qg(f(x'))D^{i_1}f(x')\cdots D^{i_q}f(x')\|$$
$$\leqq a\|D^qg(f(x))-D^qg(f(x'))\|M_q(f)$$
$$+b\|D^qg\|M_q(f)\max\{\|D^if(x)-D^if(x')\|;\ i=1,\cdots,k\}.$$

上の(a), (b)から, 適当な定数 $A\geqq 0$ をとって

(c) $\|D^k(gf)(x)-D^k(gf)(x')\|$

$$\leqq AM_k(f)\max\{\|D^ig(f(x))-D^ig(f(x'))\|;\ i=1,\cdots,k\}$$
$$+AM_k(f)\|Dg\|_{k-1}\max\{\|D^if(x)-D^if(x')\|;\ i=1,\cdots,k\}$$

とできる．(2)の $r\geqq 1$ の場合は，この式からすぐわかる．

(3)は，平均値の定理(第5章§1定理2)から

$$\|D^kf(x)-D^kf(x')\|\leqq\|D^{k+1}f\|\|x-x'\|$$

が成立することに注意すれば明らかである．

最後に $\mathcal{UBC}^r(X;F)$ が $\mathcal{BC}^r(X;F)$ の部分ベクトル空間となることは，定義からすぐわかる．また $\mathcal{UBC}^r(X,F)$ の写像列 $\{f_n\}$ が $f\in\mathcal{BC}^r(X;F)$ に収束することは，$k=0,\cdots,r$ に対して D^kf_n が D^kf に一様収束することである．一方，仮定から D^kf_n は一様連続であるから，補題3によって，D^kf も一様連続となる．したがって f は一様 C^r 級である．すなわち，$f\in\mathcal{UBC}^r(X;F)$ となる．以上から，$\mathcal{UBC}^r(X;F)$ が $\mathcal{BC}^r(X;F)$ の閉集合となることがわかった．

第2章§8定理5，および第5章§3命題6から，F が Banach 空間で $r=0$ のとき，および $r\geqq 1$ で X がノルム空間 E の開集合のとき，$\mathcal{BC}^r(X;F)$ は Banach 空間となる．このことと，上に証明したことから，(4)の後半はすぐわかる．▌

命題 4 $L:F\to G$ を連続線型写像とする．いま $f\in\mathcal{BC}^r(X;F)$ に対して，$L_*(f)=Lf$ とおくと，$L_*(f)\in\mathcal{BC}^r(X;G)$ となる．そして $L_*:\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は連続線型である．

さらに f が一様 C^r 級なら，$L_*(f)$ も一様 C^r 級である．すなわち，$L_*(\mathcal{UBC}^r(X;F))\subset\mathcal{UBC}^r(X;G)$ となる．

証明 $f:X\to F$ が C^r 級なら，第5章§3命題4によって，$L_*(f)=Lf$ も C^r 級で $D^k(L_*(f))=LD^kf$, $(k=0,\cdots,r)$ となる．したがって，f が C^r 有界なら $L_*(f)$ も C^r 有界で $\|L_*(f)\|_r\leqq\|L\|\|f\|_r$ となる．L_* の線型性は明らかだから，この不等式によって L_* は連続である．

さらに f が一様 C^r 級なら，各 $k=0,\cdots r$ に対して D^kf は一様連続，そして連続線型写像は一様連続だから，$D^k(L_*(f))=LD^kf$ も一様連続となる．し

たがって，$L_*(f)$は一様 C^r 級である．∎

命題 5 $L: F\times G\to H$ を連続 2 重線型写像とする．いま$(y,z)\in F\times G$に対して，$L(y,z)\in H$ を $y.z$ で表わし，$(f,g)\in\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^r(X;G)$に対して，$f.g: X\to H$ を$(f.g)(x)=f(x).g(x)$，$x\in X$ で定義する．すると，$f.g$ は C^r 有界で，$L_*:\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^r(X;G)\to\mathcal{BC}^r(X;H)$ を $L_*(f,g)=f.g$ とおくと，これは連続 2 重線型である．

また f,g が一様 C^r 級なら，$f.g=L_*(f,g)$ も一様 C^r 級である．すなわち，$L_*(\mathcal{UBC}^r(X;F)\times\mathcal{UBC}^r(X;G))\subset\mathcal{UBC}^r(X;H)$が成立する．

証明 $f: X\to F$, $g: X\to G$ を C^r 級とする．$r=0$ で f,g が有界なら $\|L_*(f,g)\|\leqq\|L\|\|f\|\|g\|$ が成立し，したがって $f.g=L_*(f,g)$ も有界となる．

$r\geqq 1$ の場合は，Leibniz の公式(第 5 章§3)から，$f.g: X\to H$ は C^r 級で，$1\leqq k\leqq r$ として

$$D^k(f.g)(x)=\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}D^q f(x).D^{k-q}g(x),\qquad x\in X$$

となる．したがって，f,g が C^r 有界なら適当な定数 $A\geqq 0$ があって $\|D^k(f.g)\|\leqq A\|f\|_k\|g\|_k$ となる．ゆえに $f.g$ は C^r 有界である．また L_* が 2 重線型であることは定義からすぐわかるが，この不等式からその連続性もわかる．

つぎに f,g が C^r 有界かつ一様 C^r 級とする．$0\leqq k\leqq r$ として，Leibniz の公式などから

(a) $$\|D^k(f.g)(x)-D^k(f.g)(x')\|\leqq\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}\|D^q f(x).D^{k-q}g(x)-D^q f(x').D^{k-q}g(x')\|$$

また積の連続性から，適当な定数 $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ があって

(b) $$\begin{aligned}&\|D^q f(x).D^{k-q}g(x)-D^q f(x').D^{k-q}g(x')\|\\&\leqq\|D^q f(x).D^{k-q}g(x)-D^q f(x).D^{k-q}g(x')\|\\&\quad+\|D^q f(x).D^{k-q}g(x')-D^q f(x').D^{k-q}g(x')\|\\&\leqq a\|D^q f\|\|D^{k-q}g(x)-D^{k-q}g(x')\|+b\|D^q f(x)-D^q f(x')\|\|D^{k-q}g\|\end{aligned}$$

が成立する．したがって，この(a), (b)から $f.g$ が一様 C^r 級となる．∎

$\mathrm{comp}:\mathscr{L}(F;G)\times\mathscr{L}(G;H)\to\mathscr{L}(F;H)$ を写像の合成で定義される写像，すなわち，$\mathrm{comp}(L_1,L_2)=L_2L_1$，$(L_1,L_2)\in\mathscr{L}(F;G)\times\mathscr{L}(G;H)$ とする．これは連続2重線型であるが(第4章§3例1)，命題5による $\mathrm{comp}_*:\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(F;G))\times\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(G;H))\to\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(F;H))$ による $(f,g)\in\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(F;G))\times\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(G;H))$ の像 $\mathrm{comp}_*(f,g)\in\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(F;H))$ を単に $g.f$ で表わすことにする．これは命題5の記号の使い方と反対の順序になるが，何の説明も加えないでこの記号を用いるときは，ここの約束に従うことにする．

つぎに，$\mathrm{ev}:G\times\mathscr{L}(G;H)\to H$ を $\mathrm{ev}(x,L)=L(x)$，$(x,L)\in G\times\mathscr{L}(G;H)$ と定義し，これについても上と同様なことを行なう(第4章§3例2)．すると，$\mathrm{ev}_*:\mathscr{BC}^r(X;G)\times\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(G;H))\to\mathscr{BC}^r(X;H)$ は連続2重線型となる．そして $\mathrm{ev}_*(f,g)=g.f\in\mathscr{BC}^r(X;H)$，$(f,g)\in\mathscr{BC}^r(X;G)\times\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(G;H))$ と表わすことにする．これは，$G=\mathscr{L}(K;G)$ と考えると，上の comp_* の特別な場合と考えられるから，混乱を生じない．

命題 6 (1) X をコンパクト，$g:Y\to G$ を C^r 級$(r\geqq 0)$とする．このとき，$g_*:\mathscr{BC}^r(X;Y)\to\mathscr{BC}^r(X;G)$ を $g_*(f)=gf$ と定義すると，g_* は連続である．

(2) 一般の X に対して，$g:Y\to G$ が C^r 有界で一様 C^r 級とすると$(r\geqq 0)$，$g_*:\mathscr{BC}^r(X;Y)\to\mathscr{BC}^r(X;G)$ は連続である．特に，$r=0$ のとき $g_*:\mathscr{BC}^0(X;Y)\to\mathscr{BC}^0(X;G)$ は一様連続である．

証明 X をコンパクトとする．すると，第2章§8定理5(または第2章§6定理8)から，X 上の任意の C^r 級写像は C^r 有界となる．したがって，$g_*:\mathscr{BC}^r(X;Y)\to\mathscr{BC}^r(X;G)$ はうまく定義できる．そこで(1)を r に関する帰納法で証明しよう．

$f_0\in\mathscr{BC}^0(X;Y)$ とする．X がコンパクトだから，$f_0(X)$ もコンパクト(第2章§6定理1)．したがって，補題2から，g は $f_0(X)$ で一様 C^0 級となる．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当な $\delta>0$ があって

$$\|y-f_0(x)\|<\delta,\ x\in X,\ y\in Y \quad ならば \quad \|g(y)-g(f_0(x))\|<\varepsilon$$

となる．したがって，$\|f-f_0\|<\delta$，$f\in\mathscr{BC}^0(X;Y)$ ならば

$$\|g(f(x))-g(f_0(x))\|<\varepsilon, \quad すなわち \quad \|g_*(f)-g_*(f_0)\|<\varepsilon$$

となる．ゆえに $g_*:\mathcal{BC}^0(X;Y)\to\mathcal{BC}^0(X;G)$ は連続である．

いま $r-1\geqq 0$ で(1)が成り立つとする．そして，$r\geqq 1$ で(1)が成立することをいう．$f, f_0\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$ とすると，鎖法則および命題5から，適当な定数 $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ があって

$$\begin{aligned}
&\|D(g_*(f))-D(g_*(f_0))\|_{r-1}\\
&\quad=\|D(gf)-D(gf_0)\|_{r-1}=\|(Dg)_*(f).Df-(Dg)_*(f_0).Df_0\|_{r-1}\\
&\quad\leqq\|(Dg)_*(f).Df-(Dg)_*(f_0).Df\|_{r-1}\\
&\qquad+\|(Dg)_*(f_0).Df-(Dg)_*(f_0).Df_0\|_{r-1}\\
&\quad\leqq a\|(Dg)_*(f)-(Dg)_*(f_0)\|_{r-1}\|Df\|_{r-1}+b\|(Dg)_*(f_0)\|_{r-1}\|Df-Df_0\|_{r-1}
\end{aligned}$$

となる．g は C^r 級だから Dg は C^{r-1} 級，したがって，帰納法の仮定から $(Dg)_*:\mathcal{BC}^{r-1}(X;Y)\to\mathcal{BC}^{r-1}(X;\mathcal{L}(F;G))$ は連続，ゆえに $\|f-f_0\|_r\to 0$ なら，上の不等式から $\|D(g_*(f))-D(g_*(f_0))\|_{r-1}\to 0$ となる．したがって，$r=0$ のときの $\|g_*(f)-g_*(f_0)\|\to 0$ と合わせて $\|g_*(f)-g_*(f_0)\|_r\to 0$ となる．ゆえに，$g_*:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は f_0 で連続となる．

以上で(1)の証明ができたが，(2)の証明は g の一様 C^r 級性の仮定を用いて，上と同様にできる．∎

命題 7 (1) X をコンパクト，$g:Y\to G$ を C^{r+1} 級$(r\geqq 0)$とする．このとき，$g_*:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は微分可能で，$f\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$ における微係数 $Dg_*(f):\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は

$$Dg_*(f)(\eta)=(Dg)f.\eta,\qquad \eta\in\mathcal{BC}^r(X;F)$$

で与えられる．

(2) X が一般のとき，C^{r+1} 写像 $g:F\to G$ が C^r 有界で一様に C^{r+1} 級とする$(r\geqq 0)$．すると $g_*:\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は微分可能で，Dg_* は(1)と同じ式で与えられる．

証明 X をコンパクト，$g:Y\to G$ を C^{r+1} 級$(r\geqq 0)$とする．すると命題6から $g_*:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ はうまく定義できるが，われわれは(1)を r に関する帰納法で証明しよう．$r=0$ のとき，g を Y を含む開集合 U 上に C^1 級に拡張しておこう．そしてこれも同じ g で表わすことにする．$f_0\in\mathcal{BC}^0(X;Y)$

とする．X はコンパクトだから，$f_0(X)$ は Y に含まれるコンパクト部分集合である．したがって $f_0(X)\cap U^c=\phi$ で，補題1の証明にあるように，$f_0(X)$ と U^c の間の距離 $d(f_0(X), U^c)=\delta$ は正となる．いま $\eta\in\mathcal{BC}^0(X;F)$ を $\|\eta\|<\delta$ にとると，X の任意の点 x に対して，$f_0(x)$ と $f_0(x)+\eta(x)$ を結ぶ線分 $L_x=\{f_0(x)+t\eta(x);\ 0\leqq t\leqq 1\}$ は U に含まれる．したがって第5章§1定理3から

$$\begin{aligned}
&\|g_*(f_0+\eta)-g_*(f_0)-(Dg)f_0.\eta\|_0\\
&\quad=\sup\{\|g(f_0(x)+\eta(x))-g(f_0(x))-Dg(f_0(x))(\eta(x))\|;\ x\in X\}\\
&\quad\leqq \sup\{\|Dg(y)-Dg(f_0(x))\|\|\eta(x)\|;\ x\in X,\ \ y\in L_x\}\\
&\quad\leqq \|\eta\|\sup\{\|Dg(y)-Dg(f_0(x))\|;\ x\in X,\ \ y\in L_x\}
\end{aligned}$$

となる．Dg は $f_0(X)$ で一様に C^0 級(補題2)となるから，$\|\eta\|\to 0$ のとき，$\sup\{\|Dg(y)-Dg(f_0(x))\|;\ x\in X,\ \ y\in L_x\}\to 0$ となる．したがって，g_* は微分可能で，その f_0 における微係数 $Dg_*(f_0):\mathcal{BC}^0(X;F)\to\mathcal{BC}^0(X;G)$ は

$$Dg_*(f_0)(\eta)=(Dg)f_0.\eta,\qquad \eta\in\mathcal{BC}^0(X;F)$$

で与えられることがわかった．($\mathcal{BC}^0(X;F)\ni\eta\mapsto(Dg)f_0.\eta\in\mathcal{BC}^0(X;G)$ が連続線型写像となることはすぐわかる.)

つぎに $r-1\geqq 0$ で(1)が成り立つものとして，$r\geqq 1$ でこれが成立することをいう．$f_0\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$ に対して，十分小さな $\eta\in\mathcal{BC}^r(X;F)$ をとると，Leibniz の公式および命題5から，適当な定数 $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ があって

$$\begin{aligned}
&\|D(g_*(f_0+\eta)-g_*(f_0)-(Dg)f_0.\eta)\|_{r-1}\\
&\quad=\|Dg(f_0+\eta).(Df_0+D\eta)-(Dg)f_0.Df_0\\
&\qquad-(D^2g)f_0.Df_0.\eta-(Dg)f_0.D\eta\|_{r-1}\\
&\quad\leqq a\|(Dg)_*(f_0+\eta)-(Dg)_*(f_0)-(D^2g)f_0.\eta\|_{r-1}\|Df_0+D\eta\|_{r-1}\\
&\qquad+b\|(D^2g)f_0\|_{r-1}\|\eta\|_{r-1}\|D\eta\|_{r-1}
\end{aligned}$$

となる．

帰納法の仮定から $(Dg)_*:\mathcal{BC}^{r-1}(X;Y)\to\mathcal{BC}^{r-1}(X;\mathcal{L}(F;G))$ は微分可能で，その $f_0\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$ における微係数 $D(Dg_*)(f_0):\mathcal{BC}^{r-1}(X;F)\to\mathcal{BC}^{r-1}(X;\mathcal{L}(F;G))$ は

$$D(Dg_*)(f_0)(\eta)=(D^2g)f_0.\eta,\qquad \eta\in\mathcal{BC}^{r-1}(X;F)$$

で与えられる．したがって，$\|\eta\|_{r-1}\to 0$ のとき

$$\frac{\|(Dg)_*(f_0+\eta)-(Dg)_*(f_0)-(D^2g)f_0.\,\eta\|_{r-1}}{\|\eta\|_{r-1}}\to 0$$

となる．ゆえに $\|\eta\|_r\to 0$ とすると，$\|\eta\|_{r-1}\to 0$，$\|D\eta\|_{r-1}\to 0$ となることに注意すると，上の不等式から，$\|\eta\|_r\to 0$ のとき

$$\frac{\|D(g_*(f_0+\eta)-g_*(f_0)-(Dg)f_0.\,\eta)\|_{r-1}}{\|\eta\|_{r-1}}\to 0$$

となる．さらに $\|\eta\|_r\geqq\|\eta\|_{r-1}$，$\|\eta\|_r\geqq\|\eta\|_0$ に注意すると，$r=0$ のときの結果と合わせて，$\|\eta\|_r\to 0$ のとき

$$\frac{\|g_*(f_0+\eta)-g_*(f_0)-(Dg)f_0.\,\eta\|_r}{\|\eta\|_r}\to 0$$

となる．また，命題5から，写像 $\mathcal{BC}^r(X;F)\ni\eta\mapsto(Dg)f.\,\eta\in\mathcal{BC}^r(X;G)$ が連続となる．したがって，$r\geqq 1$ で(1)が成立する．

一般の X に対しては，g の定義域が F 全体であることと，g が C^r 有界で一様 C^{r+1} 級という仮定から，上の証明がそのまま適用できて(2)が証明される．∎

定理 1　(1)　X がコンパクト，$g: Y\to G$ が C^{r+s} 級($r\geqq 0$，$s\geqq 0$)とする．このとき，$g_*:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は C^s 級である．

また g が一様 C^s 級なら，$g_*:\mathcal{BC}^0(X;Y)\to\mathcal{BC}^0(X;G)$ も一様 C^s 級である．

(2)　一般の X に対して，C^r 写像 $g: Y\to G$ が C^r 有界かつ一様 C^r 級($r\geqq 0$)なら，$g_*:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は連続である．

また $s\geqq 1$，$r\geqq 0$ として，C^{r+s} 写像 $g: F\to G$ が C^r 有界かつ一様 C^{r+s} 級なら，$g_*:\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は C^s 級となる．

証明　(1)の前半を s に関する帰納法で示す．$s=0$ のときは命題6で成立する．いま $s\geqq 1$ とし，$s-1\geqq 0$ で成り立つとして $s\geqq 1$ で成立することをいう．

$u\in\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G))$，$\eta\in\mathcal{BC}^r(X;F)$ に対して $\lambda(u)(\eta)=u.\,\eta: X\to F$ とおく．すると命題5から，$\lambda(u)(\eta)\in\mathcal{BC}^r(X;G)$ で $\lambda(u):\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は連続線型写像となる．したがって，$\lambda:\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G))\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F);\mathcal{BC}^r(X;G))$ が定義できた．そしてこの λ は命題5から連続線型写像とな

る.

命題7から $s\geqq 1$ なら Dg_* が存在して，これはつぎの写像の合成である.

$$\mathscr{BC}^r(X;Y)\xrightarrow{(Dg)_*}\mathscr{BC}^r(X;\mathscr{L}(F;G))\xrightarrow{\lambda}\mathscr{L}(\mathscr{BC}^r(X;F);\mathscr{BC}^r(X;G))$$

ここで Dg は C^{r+s-1} 級だから，帰納法の仮定によって $(Dg)_*$ は C^{s-1} 級，したがって $Dg_*=\lambda(Dg)_*$ は C^{s-1} 級，すなわち g_* は C^s 級である.

(1)の後半は命題6 (2)，命題7などを用いて，上と同様に証明できる.

(2)の前半は命題6 (2)に含まれる．後半は命題7 (2)などを用いて，上と同様に証明できる. ▌

命題 8 (1) X をコンパクト，$g: Y\to G$ は C^{r+s} 有界とする($r\geqq 0$, $s\geqq 0$). すると適当な定数 A があって $g_*:\mathscr{BC}^r(X;Y)\to\mathscr{BC}^r(X;G)$ に対して

$$\|D^s g_*(f)\|\leqq A\|g\|_{r+s}M_r(f),\qquad f\in\mathscr{BC}^r(X;Y)$$

が成立する．ここで $M_r(f)=\max\{1,(\|Df\|_{r-1})^r\}$ であって，$r=0$ のときは $M_0(f)=1$ とする.

したがって $r=0$ のとき，$g_*:\mathscr{BC}^0(X;Y)\to\mathscr{BC}^0(X;G)$ は C^s 有界となる. そして $g\in\mathscr{BC}^s(Y;G)$ に対して $g_*\in\mathscr{BC}^s(\mathscr{BC}^0(X;Y);\mathscr{BC}^0(X;G))$ を対応させる写像は連続線型写像である.

(2) X がコンパクト，$g: Y\to G$ が C^{r+s} 級で Dg が C^{r+s-1} 有界とする($r\geqq 0$, $s\geqq 1$)．このとき

$$\|D^s g_*(f)\|\leqq A\|Dg\|_{r+s-1}M_r(f),\qquad f\in\mathscr{BC}^r(X;Y)$$

が成立する.

(3) 一般の X に対して，$g: Y\to G$ が C^{r+s} 有界で一様 C^{r+s} 級 ($r\geqq 0$, $s\geqq 0$) とする．このとき，$g_*:\mathscr{BC}^r(X;Y)\to\mathscr{BC}^r(X;G)$ は C^s 級で，(1)と同じ不等式が成立する.

したがって，$r=0$ として $g_*:\mathscr{BC}^0(X;Y)\to\mathscr{BC}^0(X;G)$ は C^s 有界となる. そして，$g\in\mathscr{UBC}^s(Y;G)$ に対して $g_*\in\mathscr{BC}^s(\mathscr{BC}^0(X;Y);\mathscr{BC}^0(X;G))$ を対応させる写像は連続線型である.

(4) 一般の X に対して，$g: F\to G$ が一様 C^{r+s} 級で，Dg が C^{r+s-1} 有界 ($r\geqq 0$, $s\geqq 1$) とすると，(2)の不等式が成り立つ.

証明　(1)の前半と(2)を帰納法で証明する．$s=0$ のときは，命題2(2)から明らかである．そこで，いま $s-1\geqq 0$ で(1)の前半が成立するとして，$s\geqq 1$ で(1)の前半と(2)が成立することをいう．

いま g が C^{r+s} 級で Dg が C^{r+s-1} 有界とする．すると，帰納法の仮定および命題7から(定理1の証明と同じ記号を用いて)，$f\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$ に対して

$$\begin{aligned}\|D^s g_*(f)\| &= \|D^{s-1}(Dg_*)(f)\| = \|D^{s-1}(\lambda(Dg)_*)(f)\| \\ &= \|\lambda(D^{s-1}(Dg)_*)(f)\| \leqq \|\lambda\|\|D^{s-1}(Dg)_*(f)\| \\ &\leqq \|\lambda\|A'\|Dg\|_{r+s-1}M_r(f) \qquad (A'\geqq 0 \text{ は定数})\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，(2)が成立した．

さらに g が C^{r+s} 有界なら $\|Dg\|_{r+s-1}\leqq\|g\|_{r+s}$ となるから，上の不等式と合わせて(1)の前半が成立する．

(1)の後半は，(1)の前半からすぐわかる．

(3),(4)は(1),(2)と同様に証明できる．▮

$f:X\to Y$ を C^r 写像($r\geqq 0$)とし，$r\geqq 1$ ならさらに Df が C^{r-1} 有界とする．いま，$g\in\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$,($s\geqq 0$)に対して，$f^*(g)=gf$ とおくと，命題2から $f^*(g)\in\mathcal{BC}^r(X;G)$ となる．したがって，$f^*:\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ が定義できた．以上の仮定と記号のもとで，つぎの補題が成立する．

補題 4　f^* は連続線型写像である．

証明　f^* が線型であることは明らかである．そして，命題2から

$$r\geqq 1 \quad \text{ならば} \quad \|f^*(g)\|_r \leqq A\|g\|_r M_r(f) \leqq AM_r(f)\|g\|_{r+s} \quad (A \text{ は定数}),$$

$$r=0 \quad \text{ならば} \quad \|f^*(g)\|_0 \leqq \|g\|_0$$

となる．

したがって，f^* は連続である．▮

この補題から，$\mathcal{BC}^r(X;Y)\ni f$ に対して $f^*\in\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$ を対応させる写像

$$\theta:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$$

がうまく定義できた．そして

$$\theta(f)(\zeta)=f^*(\zeta)=\zeta f=\zeta_*(f), \qquad \zeta\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$$

となる.

また $f\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$に対して $f^*|\mathcal{UBC}^{r+s}(Y;G)\in\mathcal{L}(\mathcal{UBC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$を対応させる写像を

$$\theta':\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{L}(\mathcal{UBC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$$

とすると，つぎの命題が成立する.

命題 9 (1) X がコンパクトとする．すると $s\geqq 1$ なら，θ は C^{s-1} 級である．そして $s\geqq 2$ なら，$f_0\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$における θ の微係数 $D\theta(f_0):\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$は

$$D\theta(f_0)(\eta)(\zeta)=(D\zeta)f_0.\eta,\qquad \eta\in\mathcal{BC}^r(X;F),\ \zeta\in\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$$

で与えられる.

(2) 一般の X に対して，$s\geqq 1$ なら，$Y=F$ として

$$\theta':\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{L}(\mathcal{UBC}^{r+s}(F;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$$

は C^{s-1} 級で，$s\geqq 2$ なら，その微係数は(1)と同じ式で与えられる.

証明 Y が開集合のとき，s に関する帰納法で(1)を証明する．$s=1$ なら，補題1から $\mathcal{BC}^r(X;Y)$ は $\mathcal{BC}^r(X;F)$ の開集合である．したがって，$f_0\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$に対して $f\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$を f_0 の十分近くにとると，f_0 と f を結ぶ線分 $S_f=\{(1-t)f_0+tf;\ 0\leqq t\leqq 1\}$ は $\mathcal{BC}^r(X;Y)$に含まれる．第4章§1命題5から

$$\|\theta(f)-\theta(f_0)\|=\sup\{\|\zeta f-\zeta f_0\|_r/\|\zeta\|_{r+1};\ \zeta\in\mathcal{BC}^{r+1}(Y;G),\ \zeta\neq 0\}$$

であるが，平均値の定理と命題8から

$$\begin{aligned}\|\zeta f-\zeta f_0\|_r&=\|\zeta_*(f)-\zeta_*(f_0)\|_r\leqq\sup\{\|D\zeta_*(f_1)\|;\ f_1\in S_f\}\|f-f_0\|_r\\&\leqq\sup\{A\|\zeta\|_{r+1}M_r(f_1);\ f_1\in S_f\}\|f-f_0\|_r\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\|\theta(f)-\theta(f_0)\|\leqq A\sup\{M_r(f_1);\ f_1\in S_f\}\|f-f_0\|_r$$

となる．したがって，θ は f_0 で連続である．ゆえに $s=1$ で(1)が成立する.

つぎに $s-1\geqq 1$ で(1)が成り立つとして，$s\geqq 2$ でこれが成立することをいう．このため θ が微分可能で，$f_0\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$での微係数 $D\theta(f_0);\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$が

$$(*)\quad D\theta(f_0)(\eta)(\zeta)=(D\zeta)f_0.\eta,\qquad \eta\in\mathcal{BC}^r(X;F),\ \zeta\in\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$$

で与えられることを示す．そこで，上式の右辺を $\psi(f_0)(\eta)(\zeta)$ とおくと，命題7から $\psi(f_0)(\eta)(\zeta)=D\zeta_*(f_0)(\eta)$ となる．また，ここで

$$\psi(f_0):\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\,;\mathcal{BC}^r(X;G))$$

が連続線型写像となることは，命題5，命題2からわかる．

いま η を十分小さくとって，f_0 と $f_0+\eta$ を結ぶ線分 S が $\mathcal{BC}^r(X;Y)$ に含まれるものとする．すると，第5章§1定理3と命題9，命題8から

$$\begin{aligned}
&\|(\theta(f_0+\eta)-\theta(f_0)-\psi(f_0)(\eta))(\zeta)\|_r\\
&=\|\zeta_*(f_0+\eta)-\zeta_*(f_0)-D\zeta_*(f_0)(\eta)\|_r\\
&\leqq\|\eta\|_r\sup\{\|D\zeta_*(f_1)-D\zeta_*(f_0)\|;\ f_1\in S\}\\
&\leqq\|\eta\|_r{}^2\sup\{\|D^2\zeta_*(f_2)\|;\ f_2\in S\}\\
&\leqq A\|\eta\|_r{}^2\|\zeta\|_{r+2}\sup\{M_r(f_2);\ f_2\in S\}\\
&\leqq A\|\eta\|_r{}^2\|\zeta\|_{r+s}\sup\{M_r(f_2);\ f_2\in S\}\qquad(A\text{ は定数})
\end{aligned}$$

となる．したがって，つぎの式がわかった．

$$\|\theta(f_0+\eta)-\theta(f_0)-\psi(f_0)(\eta)\|\leqq A\|\eta\|_r{}^2\sup\{M_r(f_2);\ f_2\in S\}$$

ゆえに θ は f_0 で微分可能で，$D\theta(f_0)=\psi(f_0)$ となる．すなわち，$(*)$が証明された．

つぎに $f\in\mathcal{BC}^r(X;Y)$，$\zeta\in\mathcal{BC}^{r+s-1}(Y;\mathcal{L}(F;G))$ に対して，$\theta_1(f)(\zeta)=\zeta f=f^*(\zeta)$ とおくと，$\theta_1(f):\mathcal{BC}^{r+s-1}(Y;\mathcal{L}(F;G))\to\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G))$ は命題2から連続線型である．したがって，

$$\theta_1:\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s-1}(Y;\mathcal{L}(F;G))\,;\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G)))$$

がうまく定義される．そして帰納法の仮定から，θ_1 は C^{s-2} 級である．

つぎに $l\in\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s-1}(Y;\mathcal{L}(F;G));\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G)))$ に対して，$\beta(l)(\eta)(\zeta)=l(D\zeta).\eta$ とおく．すると，命題5から適当な定数 $a\geqq0$ があって

$$\|\beta(l)(\eta)(\zeta)\|_r\leqq a\|l\|\|D\zeta\|_r\|\eta\|_r\leqq a\|l\|\|\zeta\|_{r+s}\|\eta\|_r$$

となる．したがって，$\beta(l)(\eta):\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は連続線型である．また，$\beta(l):\mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\,;\mathcal{BC}^r(X;G))$ も連続線型である．さらに

$$\beta: \mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s-1}(Y;\mathcal{L}(F;G));\mathcal{BC}^{r}(X;\mathcal{L}(F;G)))$$
$$\to \mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r}(X;F);\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^{r}(X;G)))$$

も連続線型である.

(∗)から $D\theta=\beta\theta_1$ となり，θ_1 が C^{s-2} 級だから $D\theta$ は C^{s-2} 級である．したがって，θ は C^{s-1} 級である.

これで，(1)の Y が開集合のときは証明できた．Y が一般のときも，この証明に簡単な修正をほどこせばよい.

(2)の証明は(1)と同様である. ▮

補題4および命題9で $r=0$, $X=1$ 点のときを考える．すると，$\mathcal{BC}^0(\{p_0\};G)=G$, $\mathcal{BC}^0(\{p_0\};Y)=Y$ と考えられる.

そして，補題4で $f:\{p_0\}\to Y$ を $f(p_0)=y$ としたときの $f^*:\mathcal{BC}^s(Y;G)\to\mathcal{BC}^0(\{p_0\};G)=G$ を $\mathrm{ev}^y: \mathcal{BC}^s(Y;G)\to G$ で表わす．すなわち，$\mathrm{ev}^y(g)=g(y)$, $g\in\mathcal{BC}^s(Y;G)$である.

また，命題9の $\theta: Y=\mathcal{BC}^0(\{p_0\};Y)\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^s(Y;G);\mathcal{BC}^0(\{p_0\};G))=\mathcal{L}(\mathcal{BC}^s(Y;G);G)$を $\mathrm{ev}^{\cdot}: Y\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^s(Y;G);G)$で表わすと，$\mathrm{ev}^{\cdot}(y)=\mathrm{ev}^y$, $y\in Y$ となる.

以上の記号を用いて，補題4と命題9から，つぎの系を得る.

系　(1)　$\mathrm{ev}^y:\mathcal{BC}^s(Y;G)\to G$ は連続線型写像である.

(2)　$\mathrm{ev}^{\cdot}: Y\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^s(Y;G);G)$は $s\geqq 1$ なら C^{s-1} 級である．$s\geqq 2$ なら，$y\in Y$ におけるその微係数 $D(\mathrm{ev}^{\cdot})(y):F\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^s(Y;G);G)$は

$$D(\mathrm{ev}^{\cdot})(y)(\eta)(\zeta)=D\zeta(y).\eta,\qquad \eta\in F,\ \zeta\in\mathcal{BC}^s(Y;G)$$

で与えられる.

定理 2　(1)　Xをコンパクト，$r\geqq 0$, $s\geqq 0$ とする．いま

$$\mathrm{comp}: \mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$$

を

$$\mathrm{comp}(f,g)=gf,\qquad (f,g)\in\mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$$

で定義すると，これは C^s 級で，$s\geqq 1$ のとき(f,g)における微係数 $D\,\mathrm{comp}(f,g):\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$は

$$D\,\mathrm{comp}(f,g)(\eta,\zeta)=(Dg)f.\eta+\zeta f,$$
$$(\eta,\zeta)\in\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$$

で与えられる.

(2) 一般の X に対して, $r\geqq 0$ として

$$\mathrm{comp}:\ \mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{UBC}^r(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$$

は連続である.

また $r\geqq 0$, $s\geqq 1$ として

$$\mathrm{comp}:\ \mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{UBC}^{r+s}(F;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$$

を(1)と同様に定義すると, これも C^s 級で, その微係数は(1)と同様である.

証明 命題2から comp はうまく定義される. 以下 s に関する帰納法で(1)を証明する.

$s=0$ とすると, 命題2から

$$\begin{aligned}&\|\mathrm{comp}(f,g)-\mathrm{comp}(f_0,g_0)\|_r\\&\leqq\|(g-g_0)f\|_r+\|gf-gf_0\|_r\\&\leqq A\|g-g_0\|_r M_r(f)+\|(g_0)_*(f)-(g_0)_*(f_0)\|_r\end{aligned}$$

ここで A は定数で, $M_r(f)=\max\{1,(\|Df\|_{r-1})^r\}$ である.

命題6から $(g_0)_*:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は連続, したがって, $\|f-f_0\|_r\to 0$, $\|g-g_0\|_r\to 0$ のとき, 上の不等式から $\|\mathrm{comp}(f,g)-\mathrm{comp}(f_0,g_0)\|_r\to 0$ となる.

つぎに $s-1\geqq 0$ で(1)が成立するとして, $s\geqq 1$ でこれが成立することをいう. $s\geqq 1$ だから命題7と補題4によって comp は偏微分可能で, その $(f,g)\in\mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$ における偏微係数

$$D_1\,\mathrm{comp}(f,g):\ \mathcal{BC}^r(X;F)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$$
$$D_2\,\mathrm{comp}(f,g):\ \mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$$

はつぎの式で与えられる.

$$D_1\,\mathrm{comp}(f,g)(\eta)=(Dg_*)(f)(\eta)=(Dg)f.\eta,\qquad \eta\in\mathcal{BC}^r(X;F)$$
$$D_2\,\mathrm{comp}(f,g)(\zeta)=(Df^*)(g)(\zeta)=f^*(\zeta)=\zeta f,\qquad \zeta\in\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$$

これから, 偏導関数 $D_2\,\mathrm{comp}$ はつぎの写像の合成であることがわかる.

$$\mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\xrightarrow{p_1}\mathcal{BC}^r(X;Y)$$
$$\xrightarrow{\theta}\mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$$

ここで p_1 は第1成分への射影，したがって連続線型である．命題9から θ は C^{s-1} 級，したがって，$D_2\,\mathrm{comp}$ は C^{s-1} 級である．

つぎに $1:\mathcal{BC}^r(X;Y)\to\mathcal{BC}^r(X;Y)$ を恒等写像とし，$D:\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^{r+s-1}(Y;\mathcal{L}(F;G))$ を導関数によって定まる連続線型写像とする(命題1)．また，$\gamma:\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G))\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F);\mathcal{BC}^r(X;G))$ を $\gamma(h)(\eta)=h.\eta$，$h\in\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G))$，$\eta\in\mathcal{BC}^r(X;F)$ によって定まる線型写像とすると，偏導関数 $D_1\,\mathrm{comp}$ は上の式から，つぎの写像の合成であることがわかる．

$$\mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\xrightarrow{1\times D}\mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{BC}^{r+s-1}(Y;\mathcal{L}(F;G))$$
$$\xrightarrow{\mathrm{comp}}\mathcal{BC}^r(X;\mathcal{L}(F;G))\xrightarrow{\gamma}\mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F);\mathcal{BC}^r(X;G))$$

帰納法の仮定から，上の comp は C^{s-1} 級で，したがって，$D_1\,\mathrm{comp}$ も C^{s-1} 級である．

以上と第5章§2定理1から，comp は C^1 級で，その $(f,g)\in\mathcal{BC}^r(X;Y)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$ における微係数 $D\,\mathrm{comp}(f,g):\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;G)$ は，

$$D\,\mathrm{comp}(f,g)(\eta,\zeta)=D_1\,\mathrm{comp}\,(f,g)(\eta)+D_2\,\mathrm{comp}\,(f,g)(\zeta)$$
$$=(Dg)f.\eta+\zeta f,\qquad(\eta,\zeta)\in\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$$

で与えられる．

最後に

$$p_1:\ \mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^r(X;F),$$
$$p_2:\ \mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)\to\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G)$$

を第1，第2成分への射影とする．そして

$$p_1^*:\ \mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F);\mathcal{BC}^r(X;G))$$
$$\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$$

を $p_1^*(l)=lp_1$，$l\in\mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F);\mathcal{BC}^r(X;G))$，

$$p_2^*:\ \mathcal{L}(\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$$
$$\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F)\times\mathcal{BC}^{r+s}(Y;G);\mathcal{BC}^r(X;G))$$

を $p_2^*(m)=mp_2$, $m\in\mathcal{L}(\mathcal{BC}^r(X;F);\mathcal{BC}^r(X;G))$と定義すると，これらは連続線型で，$D\,\mathrm{comp}=p_1^*D_1\,\mathrm{comp}+p_2^*D_2\,\mathrm{comp}$ となる．$D_1\,\mathrm{comp}, D_2\,\mathrm{comp}$ は C^{s-1} 級だから，$D\,\mathrm{comp}$ は C^{s-1} 級，したがって，comp は C^s 級である．

(2)の証明も上と同様である．▌

定理2で $r=0$, $X=1$ 点としてつぎの系を得る．

系 $\mathrm{ev}: Y\times\mathcal{BC}^s(Y;G)\to G$ を $\mathrm{ev}(y,g)=g(y)$, $(y,g)\in Y\times\mathcal{BC}^s(Y;G)$ とすると，ev は C^s 級である．

零以上の整数全体の集合 $N=\{0,1,2,\cdots\}$ は，数直線 $\boldsymbol{R}$ の部分空間として，自然な位相で離散空間となる．N から F への有界な連続写像(実は任意の写像は連続だから，これは有界な写像と同じことである) $\gamma: N\to F$ は F の有界な点列 $\{\gamma(n)\}$ と同一視できる．すなわち $\mathcal{B}(F)$を F の有界な点列全体の集合とすると，$\mathcal{BC}^0(N;F)=\mathcal{B}(F)$である．したがって，$\mathcal{B}(F)$はノルム空間となる．そして，$F$ の有界点列 $\gamma=\{\gamma(n)\}$ のノルムは $\|\gamma\|=\sup\{\|\gamma(n)\|;\ n=0,1,2,\cdots\}$ で与えられる．また，F が Banach 空間なら，$\mathcal{B}(F)$ も Banach 空間となる．

つぎに F の収束点列全体の集合を $\mathcal{S}(F)$とすると，$\mathcal{S}(F)$は $\mathcal{B}(F)$の部分ベクトル空間となることはすぐわかる．

いま $\bar{N}=N\cup\{\infty\}$ とし，$\bar{N}$ の2点 x, y に対して

$$d(x,y)=|2^{-x}-2^{-y}| \qquad (2^{-\infty}=0 \text{ とする})$$

とおく．すると，d は $\bar{N}$ の距離であって，$\bar{N}$ はこの距離によってコンパクト距離空間となる．さらに，$N\subset\bar{N}$ の相対位相が離散的であることもすぐわかる．すなわち，$\bar{N}$ は N に1点をつけ加えてコンパクト化した空間である．(第2章§6定理5)

$\bar{N}$ から F への連続写像はすべて有界となるが，$\gamma\in\mathcal{BC}^0(\bar{N};F)$に対して，$F$ の点列 $\{\gamma(n)\}_{n=0,1,\cdots}$ を考えると，これは $\gamma(\infty)$ に収束する．逆に，F の収束点列 $\{y_n\}$ に対して，$y_\infty=\lim_{n\to\infty} y_n$ とし，$\gamma:\bar{N}\to F$ を $\gamma(x)=y_x$, $x\in\bar{N}$ とおくと，γ は連続となる．そして，この対応はノルムを保つ．したがって，$\mathcal{BC}^0(\bar{N};F)=\mathcal{S}(F)$と考えられる．したがって，$F$ が Banach 空間なら $\mathcal{S}(F)$ も Banach 空間となる．

$Y\subset F$ のとき，$\mathcal{B}(Y)=\{\gamma\in\mathcal{B}(F);\ \gamma(n)\in Y,\ n=0,1,\cdots\}=\mathcal{BC}^0(N;Y)$，$\mathcal{S}(Y)=\{\gamma\in\mathcal{S}(F);\ \gamma(n)\in Y,\ n=0,1,\cdots,\infty\}=\mathcal{BC}^0(\bar{N};Y)$とおく．

いま $g:Y\to G$ が C^s 級$(s\geqq 0)$とする．すると，$g_*:\mathcal{S}(Y)=\mathcal{BC}^0(\bar{N};Y)\to\mathcal{BC}^0(\bar{N};G)=\mathcal{S}(G)$が $g_*(\gamma)=g\gamma$ で定義される．

このとき，つぎの定理が成立する．

定理 3 $g:Y\to G$ が C^s 級なら，$g_*:\mathcal{S}(Y)\to\mathcal{S}(G)$は C^s 級である．そして，g が C^s 有界なら，g_* も C^s 有界である．

また，g が一様に C^s 級なら，g_* も一様に C^s 級である．

証明 定理1および命題8から明らかである．▌

§2 縮小写像の定理

X, Y を距離空間とする，以下簡単のため X, Y の距離を同じ記号 d で表わすことにする．いま写像 $f:X\to Y$ に対して，適当な定数 $K\geqq 0$ があって

$$(*)\quad d(f(x),f(x'))\leqq Kd(x,x'),\qquad x,x'\in X$$

が成立するとき，f を **Lipschitz 写像**という．

定義から，Lipschitz 写像は一様連続である．いま，$f:X\to Y$ が全単射で，f およびその逆写像 $f^{-1}:Y\to X$ がともにLipschitz 写像のとき，f を **Lipschitz 同相写像**という．

Lipschitz 写像 $f:X\to Y$ に対して，$(*)$の性質をもつような K 全体の集合の下限を $\mathrm{Lip}(f)$で表わし，f の **Lipschitz 定数**という．定義から $\mathrm{Lip}(f)\geqq 0$ である．

命題 1 Lipschitz 写像 $f:X\to Y$ に対して

$$d(f(x),f(x'))\leqq \mathrm{Lip}(f)d(x,x'),\qquad x,x'\in X$$

が成立する．

証明 もしこの命題が成立しないものとすると，適当な $x_0, x_0'\in X$ に対して，$d(f(x_0),f(x_0'))>\mathrm{Lip}(f)d(x_0,x_0')$が成立する．したがって，$\mathrm{Lip}(f)$に

十分近い $k>\mathrm{Lip}(f)$ をとると $d(f(x_0),f(x_0'))>kd(x_0,x_0')$ となる.

一方, $\mathrm{Lip}(f)$ の定義から, $k>K\geqq\mathrm{Lip}(f)$ をみたす適当な K があって, $d(f(x),f(x'))\leqq Kd(x,x')$, $x,x'\in X$ が成立する. したがって, $x=x_0$, $x'=x_0'$ として

$$d(f(x_0),f(x_0'))\leqq Kd(x_0,x_0')<kd(x_0,x_0').$$

を得る. これは前半に示したことに矛盾する. ▮

命題 2　(1)　$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ が Lipschitz 写像なら, $g\circ f:X\to Z$ も Lipschitz 写像で

$$\mathrm{Lip}(g\circ f)\leqq\mathrm{Lip}(g)\,\mathrm{Lip}(f)$$

となる.

(2)　$f,g:X\to F$ が Lipschitz 写像で, F は K 上のノルム空間, $\alpha,\beta\in K$ とする. このとき, $\alpha f+\beta g:X\to F$ も Lipschitz 写像であって, $\mathrm{Lip}(\alpha f+\beta g)\leqq|\alpha|\mathrm{Lip}(f)+|\beta|\mathrm{Lip}(g)$ となる.

(3)　E,F をノルム空間, $L:E\to F$ を連続線型写像とする. このとき, L は Lipschitz 写像で, $\mathrm{Lip}(L)=\|L\|$ となる.

証明　(1)　$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を Lipschitz 写像とする. すると $x,x'\in X$ として, 命題1から

$$d(gf(x),gf(x'))\leqq\mathrm{Lip}(g)d(f(x),f(x'))\leqq\mathrm{Lip}(g)\mathrm{Lip}(f)d(x,x')$$

が成り立つ. したがって, $gf:X\to Z$ も Lipschitz 写像で

$$\mathrm{Lip}(gf)\leqq\mathrm{Lip}(g)\mathrm{Lip}(f)$$

となる.

(2)　$f,g:X\to F$ を Lipschitz 写像, F を K 上のノルム空間, $\alpha,\beta\in K$ とする. このとき, $x,x'\in X$ として

$$\begin{aligned}&\|(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(x')\|\\&\quad=\|\alpha(f(x)-f(x'))+\beta(g(x)-g(x'))\|\\&\quad\leqq|\alpha|\|f(x)-f(x')\|+|\beta|\|g(x)-g(x')\|\\&\quad\leqq(|\alpha|\,\mathrm{Lip}(f)+|\beta|\,\mathrm{Lip}(g))\|x-x'\|\end{aligned}$$

となる. これから(2)は明らかである.

(3)　E, F をノルム空間，$L: E \to F$ を連続線型写像とすると，$\|L(x)-L(x')\| = \|L(x-x')\| \leqq \|L\|\|x-x'\|$，$x, x' \in E$ となる．したがって，L は Lipschitz 写像となる．また定義を比較すれば，$\|L\| = \mathrm{Lip}(L)$ もすぐわかる．▌

X を距離空間とする．Lipschitz 写像 $f: X \to X$ が $\mathrm{Lip}(f) < 1$ をみたすとき，f を X の**縮小写像**という．

一般の写像 $f: X \to X$ に対して，$f(x) = x$ となる点 $x \in X$ を f の**不動点**という．

定理 1　**(縮小写像の原理)**　(1)　X を距離空間，$f: X \to X$ を縮小写像とする．すると，f の不動点は，存在すれば，ただ1つである．

(2)　X が完備なら，X の縮小写像 $f: X \to X$ は，ただ1つの不動点をもつ．そして，これを x_0 とすると，任意の点 $x \in X$ に対して，$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$ が成立する．

証明　いま x_1, x_2 を f の不動点とする．すると $x_1 = f(x_1)$，　$x_2 = f(x_2)$ となるから，

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leqq \mathrm{Lip}(f)\, d(x_1, x_2)$$

となる．しかるに，仮定から $\mathrm{Lip}(f) < 1$ であって，上の不等式が成立するためには，$d(x_1, x_2) = 0$ でなければならない．すなわち，$x_1 = x_2$ である．

つぎに X を完備とし，$\mathrm{Lip}(f) = K < 1$ とする．すると，零または正の整数 l に対して，$x \in X$ として

$$d(f^{l+1}(x), f^l(x)) \leqq K d(f^l(x), f^{l-1}(x)) \leqq \cdots \leqq K^l d(f(x), x)$$

が成立する．したがって，$m > n \geqq N$ として

$$\begin{aligned} d(f^m(x), f^n(x)) &\leqq d(f^m(x), f^{m-1}(x)) + d(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x)) + \cdots \\ &\qquad + d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \\ &\leqq (K^{m-1} + K^{m-2} + \cdots + K^n)\, d(f(x), x) \\ &\leqq K^n/(1-K)\, d(f(x), x) \leqq K^N/(1-K)\, d(f(x), x) \end{aligned}$$

となる．$0 \leqq K < 1$ だから，$\lim_{N\to\infty} K^N/(1-K) = 0$ となり，上式から，点列 $\{f^n(x)\}$ が X の基本列であることがわかる．したがって，X の完備性から，これは収束する．

いま $x_0 = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ とおくと，f の連続性から

$$f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x_0$$

となる．すなわち，x_0 は f の不動点である．(1)から f の不動点は x_0 以外にない．▌

X を集合，Y を距離空間とする．写像 $T: X\times Y\to Y$ が与えられたとき，$x\in X$ に対して $T_x: Y\to Y$ を $T_x(y)=T(x,y)$，$y\in Y$ と定義する．

いま，すべての T_x, $(x\in X)$ が縮小写像とすると，縮小写像の原理から，その不動点は高々1つである．すなわち，各 $x\in X$ に対して，$T_x(y)=T(x,y)=y$ となる $y\in Y$ は高々1つである．したがって，X から Y への写像 $g: X\to Y$ で，$T(x, g(x))=g(x)$，$x\in X$ をみたすものは，存在しても，ただ1つである．そして，もし Y が完備なら，縮小写像の原理から，このような g が存在する．

このように，$T: X\times Y\to Y$ に対して，$g: X\to Y$ が

$$T(x, g(x)) = g(x), \qquad x\in X$$

をみたすとき，g を T の**不動点写像**という．

写像 $T: X\times Y\to Y$ があたえられたとき，各 $T_x, x\in X$ が縮小写像で，すべての $x\in X$ に対して，$\mathrm{Lip}(T_x)\leqq K<1$ となるような定数 K が存在するとき，T を**第2成分に関して一様縮小**という．そして，この K を T の**一様縮小定数**という．これは，$d(T(x,y), T(x,y'))\leqq Kd(y,y')$，$x\in X$，$y, y'\in Y$ が定数 $0\leqq K<1$ に対して成立することと同じである．

以上の記号と定義のもとで，つぎの主定理を証明しよう．これは，定理3と合わせて，今後の理論の展開の中心的役割りを占めるものである．

定理 2 X, Y を距離空間とし，$T: X\times Y\to Y$ は第2成分に関して一様縮小とする．いま写像 $g: X\to Y$ が T の不動点写像，すなわち $T(x, g(x))=g(x)$，$x\in X$ をみたすものとする．このとき，つぎの性質が成立する．

(1) T が有界なら g も有界で，T が連続なら g も連続である．

(2) T が Lipschitz 写像なら，g も Lipschitz 写像である．

(3) E をノルム空間，F を Banach 空間とする．いま X, Y をそれぞれ E, F の部分集合とし，$X\subset\overline{\mathrm{Int}X}$，$Y\subset\overline{\mathrm{Int}\ Y}$ をみたすものとする．このとき T が C^r 写像 $(r\geqq1)$ なら，g も C^r 写像であって，点 $x\in X$ における g の微係数は

$$Dg(x) = \{1 - D_2T(x, g(x))\}^{-1}D_1T(x, g(x))$$

で与えられる．ここで，D_1T, D_2T はそれぞれ，第1，第2変数に関する T の偏導関数である．

(4) (3)と同じ仮定のもとで，さらに DT が C^{r-1} 有界なら，Dg も C^{r-1} 有界である．また T が C^r 有界なら，g も C^r 有界である．

さて，この定理の証明の前に，補題を2つ準備しよう．

補題 1 E, F をノルム空間，X は E の部分集合で，$X \subset \overline{\mathrm{Int}\, X}$ をみたすものとする．いま，$f: X \to F$ を C^r 写像($r \geqq 1$)とすると，つぎの性質が成立する．

(1) f が Lipschitz 写像なら，$\|Df\| = \sup\{\|Df(x)\|;\ x \in X\} \leqq \mathrm{Lip}(f)$ である．

(2) X が凸集合で，Df が有界なら，f は Lipschitz 写像で，$\|Df\| = \mathrm{Lip}(f)$ である．

証明 f を X を含む開集合まで C^r 級に拡張し，これも同じ f で表わすことにする．いま十分小さい $h \in E$ に対して $\varepsilon(h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)$，$x \in X$ とおくと，微係数の定義から $\lim_{h \to 0} \|\varepsilon(h)\|/\|h\| = 0$ となる．一方，

$$\mathrm{Lip}(f)\|h\| \geqq \|f(x+h) - f(x)\| = \|Df(x)(h) + \varepsilon(h)\|$$
$$\geqq \|Df(x)(h)\| - \|\varepsilon(h)\|$$

から，$h \neq 0$ として $\|Df(x)(h)\|/\|h\| - \|\varepsilon(h)\|/\|h\| \leqq \mathrm{Lip}(f)$ となる．ここで $h = th_1$，$\|h_1\| = 1$，$t \in \boldsymbol{R}$ とおき，$t \to 0$ とすると，上の不等式から $\|Df(x)(h_1)\|/\|h_1\| \leqq \mathrm{Lip}(f)$ を得る．したがって，第4章§1命題5から $\|Df(x)\| \leqq \mathrm{Lip}(f)$ となる．すなわち，Df は有界で，$\|Df\| \leqq \mathrm{Lip}(f)$ である．

つぎに X が凸集合で，Df が有界とすると，平均値の定理から，X の任意の2点 x, x' に対して

$$\|f(x) - f(x')\| \leqq \|Df\|\|x - x'\|$$

が成立する．したがって，f は Lipschitz 写像で，$\mathrm{Lip}(f) \leqq \|Df\|$ が成立する．ゆえに，前半と合わせて，$\mathrm{Lip}(f) = \|Df\|$ を得る．▮

補題 2 F を Banach 空間，$B \subset \mathscr{L}(F; F)$ を原点を中心とする半径 K, $(0 < K < 1)$ の閉球とする．いま

$$\rho: B\to\mathcal{L}(F;F) \quad を \quad \rho(L)=(1-L)^{-1}, \qquad L\in B$$

と定義すると，ρ はすべての $r\geqq 0$ に対して C^r 有界(すなわち C^∞ 有界)で，かつ一様 C^r 級(すなわち一様 C^∞ 級)である．ここで，1 は F の恒等写像とする．

証明　$L\in B$ とすると $\|L\|\leqq K<1$ である．したがって，第4章§1命題11から，$1-L$ は線型同相で $\|(1-L)^{-1}\|\leqq(1-\|L\|)^{-1}\leqq(1-K)^{-1}$ となる．すなわち，$\rho: B\to\mathcal{L}(F;F)$ がうまく定義できて，有界である．

つぎに，第5章§1命題7および§3命題5から，ρ は C^∞ 級であって，その $L_0\in B$ における微係数 $D\rho(L_0):\mathcal{L}(F;F)\to\mathcal{L}(F;F)$ は，$D\rho(L_0)(L)=(1-L_0)^{-1}L(1-L_0)^{-1}$，$L\in\mathcal{L}(F;F)$ で与えられる．いま，$\beta:\mathcal{L}(F;F)\times\mathcal{L}(F;F)\to\mathcal{L}(\mathcal{L}(F;F);\mathcal{L}(F;F))$ を $\beta(L_1, L_2)(L)=L_1LL_2$，$L_1, L_2, L\in\mathcal{L}(F;F)$ とおくと，これはうまく定義できて，連続2重線型である．そして，$D\rho(L_0)=\beta((1-L_0)^{-1}, (1-L_0)^{-1})=\beta(\rho(L_0), \rho(L_0))$ となる．これを用いて，ρ がすべての $r\geqq 1$ で C^r 有界をいう．

いま ρ が C^{r-1} 有界とすると，§1命題5から，$L_0\to\beta(\rho(L_0), \rho(L_0))$ は C^{r-1} 有界，すなわち $D\rho$ は C^{r-1} 有界となる．したがって，ρ が C^0 有界であることと合わせて，ρ の C^r 有界性がわかる．

最後に，B が凸集合で ρ が C^∞ 級であることから，補題1を $D^r\rho$, $(r\geqq 0)$ に適用すると，$D^r\rho$ は Lipschitz 写像となる．したがって，$D^r\rho$, $(r\geqq 0)$ は一様連続となる．すなわち，ρ は一様 C^r 級である．

定理2の証明　T が第2成分に関して一様縮小で，その一様縮小定数を K, $(0<K<1)$ とする．

$g(x)=T(x, g(x))$, $x\in X$ から，T が有界なら g も有界で，$\|g\|\leqq\|T\|$ となる．

また，$x, x'\in X$ として

$$\begin{aligned}
&d(g(x), g(x'))\\
&\quad=d(T(x, g(x)), T(x', g(x')))\\
&\quad\leqq d(T(x, g(x)), T(x', g(x)))+d(T(x', g(x)), T(x', g(x')))\\
&\quad\leqq d(T(x, g(x)), T(x', g(x)))+Kd(g(x), g(x'))
\end{aligned}$$

となる．$1-K>0$ に注意すると，上式から

$$d(g(x), g(x')) \leqq (1-K)^{-1} d(T(x, g(x)), T(x', g(x)))$$

を得る．そして，この不等式から，T が連続なら g が連続となること，および，T が Lipschitz 写像なら，g も Lipschitz 写像となることがわかる．すなわち，(1), (2)がわかった．

つぎに，E をノルム空間，F を Banach 空間とし，X, Y をそれぞれ E, F の開集合とする．そして $T: X \times Y \to Y$ が C^r 写像($r \geqq 1$)として，定理の(3), (4)を証明しよう．

T が第2成分に関して一様縮小で，その一様縮小定数が K, $(0<K<1)$ であるから，補題1によって，T の第2変数に関する偏微係数 $D_2T(x, y) \in \mathcal{L}(F; F)$, $(x, y) \in X \times Y$ のノルムは $\|D_2T(x, y)\| \leqq K < 1$ をみたす．したがって，$1-D_2T(x, y)$は線型同相写像で，$\|\{1-D_2T(x, y)\}^{-1}\| \leqq (1-K)^{-1}$ となる．そこで，各点 $x \in X$ で g は微分可能で，その微係数はつぎの式で与えられることを証明しよう．

(a) $Dg(x) = \{1-D_2T(x, g(x))\}^{-1} D_1T(x, g(x))$

まず，上の右辺が連続線型写像であることは明らかである．そして，$h \in E$ を十分零の近くにとると，第5章§2定理1から，つぎの不等式が成り立つ．

(b)
$$\begin{aligned}
&\|g(x+h)-g(x)-\{1-D_2T(x, g(x))\}^{-1} D_1T(x, g(x))(h)\| \\
&= \|\{1-D_2T(x, g(x))\}^{-1}\{g(x+h)-g(x) \\
&\qquad -D_2T(x, g(x))(g(x+h)-g(x))-D_1T(x, g(x))(h)\}\| \\
&\leqq \|\{1-D_2T(x, g(x))\}^{-1}\|\|g(x+h)-g(x) \\
&\qquad -D_2T(x, g(x))(g(x+h)-g(x))-D_1T(x, g(x))(h)\| \\
&\leqq (1-K)^{-1}\|T(x+h, g(x+h))-T(x, g(x)) \\
&\qquad -DT(x, g(x))((x+h, g(x+h))-(x, g(x)))\|
\end{aligned}$$

この不等式の右辺を $\varepsilon(x, h)$ とおくと，T の微分可能性から $\|(x+h, g(x+h))-(x, g(x))\| \to 0$ のとき $\varepsilon(x, h)/(\|(x+h, g(x+h))-(x, g(x))\|) \to 0$ となる．また，T は C^r 級($r \geqq 1$)だから，補題1によって，T は点$(x, g(x))$の近傍で Lipschitz 写像である．したがって，g も x の近傍で Lipschitz 写像である．ゆえに，零に十分近い $h \in E$ に対して，$\|(x+h, g(x+h))-(x, g(x))\|/\|h\|$ は有界

で，$\|h\|\to 0$ のとき，$\|(x+h, g(x+h))-(x, g(x))\|\to 0$ となる．以上から，$\|h\|\to 0$ のとき，$\varepsilon(x, h)/\|h\|\to 0$ がわかった．したがって，(b)の不等式から，g は点 x で微分可能で，その微係数は(a)で与えられることがわかった．

いま $B\subset\mathcal{L}(F;F)$ を，原点を中心とする半径 $K, (0<K<1)$ の閉球とする．そして，$\rho: B\to\mathcal{L}(F;F)$ を $\rho(L)=(1-L)^{-1}$, $L\in B$ で与えられる写像とすると，(a)から，g の導関数 Dg はつぎの写像の合成写像となることがわかる．

$$\text{(c)}\quad X\xrightarrow{(1,g)}X\times Y\xrightarrow{(D_1T, D_2T)}\mathcal{L}(E;F)\times B$$
$$\xrightarrow{1\times\rho}\mathcal{L}(E;F)\times\mathcal{L}(F;F)\xrightarrow{\mathrm{comp}}\mathcal{L}(E;F)$$

ここで，T が C^r 級だから，(D_1T, D_2T) は C^{r-1} 級．そして，補題2から，ρ は C^∞ 有界，comp は連続2重線型である．

上の(c)を用いて，(3)を $r\geqq 1$ に関する帰納法で証明しよう．$r=1$ のときは，(1)から g の連続性がわかり，(c)から Dg の連続性がわかる．すなわち，$r=1$ で(3)が成立する．

$r-1\geqq 0$ で(3)が成立するものとする．T が C^r 級なら，帰納法の仮定を用いて，g は C^{r-1} 級であり，したがって，(c)から Dg も C^{r-1} 級である．すなわち，g は C^r 級である．

さらに，DT が C^{r-1} 有界なら，Dg が C^{r-1} 有界となることは，(c)と補題2および§1命題5を用いて，上と同様に証明することができる．また，T が C^r 有界なら，(1)と合わせて g は C^r 有界である．

以上で X, Y が開集合のときの(3), (4)の証明が終ったが，$X\subset\overline{\mathrm{Int}\,X}$, $Y\subset\overline{\mathrm{Int}\,Y}$ をみたす一般の X, Y に対しては T, g を適当に拡張することによって，上の場合に帰着させることができる．すなわち，T を $X\times Y$ を含む開集合にまで C^r 級に拡張して，これを $\tilde{T}$ とする．いま，$x_0\in X$, $y_0=g(x_0)\in Y$ とする．すると，$T(x_0, y_0)=y_0$ となる．

$D_2\tilde{T}, \tilde{T}$ の連続性から，$\|D_2T(x_0, y_0)\|\leqq K<1$ に注意すると，適当な $\alpha>0$, $\beta>0$ をとると

$$\|x-x_0\|\leqq\alpha,\ \|y-y_0\|\leqq\beta\quad ならば\quad \|D_2\tilde{T}\|\leqq k'<1\quad (k' は定数),$$

かつ

$$\|\tilde{T}(x, y_0)-\tilde{T}(x_0, y_0)\| \leqq (1-k')\beta$$

とできる.

すると，$\|x-x_0\|\leqq\alpha$, $\|y-y_0\|\leqq\beta$ として，平均値の定理から

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{T}(x, y)-\tilde{T}(x_0, y_0)\| \\
&\quad\leqq \|\tilde{T}(x, y)-\tilde{T}(x, y_0)\|+\|\tilde{T}(x, y_0)-\tilde{T}(x_0, y_0)\| \\
&\quad\leqq k'\|y-y_0\|+(1-k')\beta \\
&\quad\leqq k'\beta+(1-k')\beta = \beta
\end{aligned}$$

となる．したがって，$\bar{B}_\alpha(x_0), \bar{B}_\beta(y_0)$を，それぞれ，$x_0, y_0$ を中心とする半径 α, β の閉球とすると，$\tilde{T}(x_0, y_0)=T(x_0, y_0)=y_0$ から，$\tilde{T}(\bar{B}_\alpha(x_0)\times\bar{B}_\beta(y_0))\subset\bar{B}_\beta(y_0)$がわかる．そして，補題1と $\|D_2\tilde{T}\|\leqq k'<1$ から，$\tilde{T}:\bar{B}_\alpha(x_0)\times\bar{B}_\beta(y_0)\to\bar{B}_\beta(y_0)$は第2成分に関して一様縮小である．

F は Banach 空間で $\bar{B}_\beta(y_0)$はその閉集合だから，第2章§8定理1によって，$\bar{B}_\beta(y_0)$は完備となる．したがって，定理1により，$\tilde{T}$ は不動点写像 $\tilde{g}$: $\bar{B}_\alpha(x_0)\to\bar{B}_\beta(y_0)$ をもつ．そして，$\tilde{g}$ と g は共通の定義域上で一致する．

さらに，上の議論で閉球 $\bar{B}_\alpha(x_0), \bar{B}_\beta(y_0)$の代りに，開球 $B_\alpha(x_0), B_\beta(y_0)$を使うと，$\tilde{T}(B_\alpha(x_0)\times B_\beta(y_0))\subset B_\beta(y_0)$がわかる．したがって，$\tilde{T}: B_\alpha(x_0)\times B_\beta(y_0)\to B_\beta(y_0)$および，$\tilde{g}: B_\alpha(x_0)\to B_\beta(y_0)$を使うと，始めの議論から，$\tilde{g}$ がここで C^r 級とわかる．すなわち，g は x_0 で C^r 級である．

これから後の議論は前と同様である．▌

A を位相空間，X, Y を距離空間とする．そして，簡単のため，これらの距離を同じ d で表わすことにする．いま写像 $T': A\times X\times Y\to Y$ がつぎの条件をみたすものとする．

(1) 各 $a\in A$ に対して，$T_a': X\times Y\to Y$ を $T_a'(x, y)=T'(a, x, y)$, $(x, y)\in X\times Y$ とおくと，$T_a', a\in A$ は第2成分に関して一様縮小である．

(2) 適当な定数 K, $(0<K<1)$があって，$T_a', a\in A$ の一様縮小定数 K_a は $K_a\leqq K$ をみたす．すなわち，

$$d(T'(a, x, y), T'(a, x, y'))\leqq Kd(y, y'),$$
$$(a, x, y), (a, x, y')\in A\times X\times Y$$

が成立する.

(3)　$r=0$ のとき，$T_a', a\in A$ は C^0 有界である．また，$r\geqq 1$ のとき，X はノルム空間 E の部分集合，Y は Banach 空間 F の部分集合で，$X\subset\overline{\mathrm{Int}\,X}$, $Y\subset\overline{\mathrm{Int}\,Y}$ とし，さらに，各 $a\in A$ に対して T_a' は C^r 有界で，DT_a' は一様 C^{r-1} 級である.

以上3つの条件を仮定し，さらに $T_a', a\in A$ の不動点写像を $g_a: X\to Y$ とする．すると定理2から，これは C^r 有界である($r\geqq 0$)．したがって，$\alpha: A\to \mathcal{BC}^r(X\times Y; Y)$，$\beta: A\to\mathcal{BC}^r(X; Y)$ を $\alpha(a)=T_a'$，$\beta(a)=ga$，$a\in A$ で定義することができる.

定理 3　以上の仮定と記号のもとで，α が連続なら，β も連続である.

証明　r に関する帰納法でこれを証明しよう.

$r=0$，$a, a_0\in A$，$x\in X$ とする．すると

$$
\begin{aligned}
&d(g_a(x), g_{a_0}(x))\\
&\quad = d(T_a'(x, g_a(x)), T_{a_0}'(x, g_{a_0}(x)))\\
&\quad \leqq d(T_a'(x, g_a(x)), T_{a_0}'(x, g_a(x)))+d(T_{a_0}'(x, g_a(x)), T_{a_0}'(x, g_{a_0}(x)))\\
&\quad \leqq d(T_a'(x, g_a(x)), T_{a_0}'(x, g_a(x)))+Kd(g_a(x), g_{a_0}(x))
\end{aligned}
$$

したがって，$1-K>0$ に注意すると

$$d(g_a(x), g_{a_0}(x))\leqq(1-K)^{-1}d(T_a'(x, g_a(x)), T_{a_0}'(x, g_a(x)))$$

となる．ここで，$d(g_a, g_{a_0})=\sup\{d(g_a(x), g_{a_0}(x));\ x\in X\}$，$d(T_a', T_{a_0}')=\sup\{d(T_a'(x, y), T_{a_0}'(x, y));\ (x, y)\in X\times Y\}$ とすると，上の不等式から

$$d(g_0, g_{a_0})\leqq(1-K)^{-1}d(T_a', T_{a_0}')$$

となる．したがって，α が連続なら β も連続である.

つぎに $r-1\geqq 0$ で定理が成立するとして，$r\geqq 1$ で成立することをいう.

いま，$\lambda: A\to\mathcal{BC}^{r-1}(X; X\times Y)$ を $\lambda(a)=(1, g_a): X\to X\times Y$ とおく，すると，帰納法の仮定から，λ はうまく定義できて，連続である．また，$\mu: A\to \mathcal{UBC}^{r-1}(X\times Y; \mathcal{L}(E\times F; F))$ を $\mu(a)=DT_a'$ とおくと，仮定(3)から，これもうまく定義できて，さらに α の連続性から，μ の連続性もわかる．したがって，つぎの合成写像 ν も連続である(§1 定理2).

$$\nu: A \xrightarrow{(\lambda,\mu)} \mathcal{BC}^{r-1}(X; X\times Y)\times\mathcal{UBC}^{r-1}(X\times Y; \mathcal{L}(E\times F; F))$$
$$\xrightarrow{\text{comp}} \mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E\times F; F))$$

ここで，$\mathcal{L}(E\times F; F)=\mathcal{L}(E; F)\times\mathcal{L}(F; F)$と自然に同一視できることから

$$\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E\times F; F))=\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E; F))\times\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(F; F))$$

と同一視すると

$$\nu(a)=DT_a'(1, g_a)=(D_1T_a'(1, g_a), D_2T_a'(1, g_a))$$

となる．また，仮定(2)と補題1から，$\|D_2T_a'(1, g_a)\|\leqq K$となる．したがって，$B\subset\mathcal{L}(F; F)$を，原点を中心とする半径$K$の，閉球とすると，

$$\nu(a)\in\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E; F))\times\mathcal{BC}^{r-1}(X; B)$$

である．

いま，$\gamma: A\to\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E; F))$を$\gamma(a)=Dg_a$，$a\in A$とおくと，定理2から，これはつぎの写像の合成である．

$$(*)\quad A\xrightarrow{\nu}\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E; F))\times\mathcal{BC}^{r-1}(X; B)$$
$$\xrightarrow{1\times\rho_*}\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E; F))\times\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(F; F))$$
$$\xrightarrow{\text{comp}_*}\mathcal{BC}^{r-1}(X; \mathcal{L}(E; F))$$

ここで，$\rho: B\to\mathcal{L}(F; F)$，$\text{comp}: \mathcal{L}(E; F)\times\mathcal{L}(F; F)\to\mathcal{L}(E; F)$は定理2の証明に現われたもので，$\rho_*, \text{comp}_*$は§1で定義したものである．そして，補題2と§1定理1から，ρ_*は連続，また§1命題5から，comp_*は連続2重線型写像である．以上から，$(*)$によってγは連続となる．したがって，αの$r=0$のときの連続性と合わせて，βの一般の$r\geqq1$での連続性がわかった．∎

§3 逆関数定理と陰関数定理

ここでは，§2の応用として，逆関数の定理と陰関数の定理を証明する．この2つの定理の証明だけなら，もっと簡単な方法があるが，後で必要となる定理1が中心であって，これから他の定理が導かれる．

ノルム空間 E, F の部分集合 $X\subset E$, $Y\subset F$ をとる．写像 $f: X\to Y$ が C^r **微分同相写像**($r\geqq 1$)とは，f が全単射で，f および f^{-1} が C^r 級となるときをいう(§1参照).

命題 1　上と同じ記号を用いて，$f: X\to Y$ が C^r 微分同相写像($r\geqq 1$)とすると，X の各点 x での f の微係数 $Df(x): E\to F$ は線型同相写像で，その逆写像は $f^{-1}: Y\to X$ の点 $f(x)$における微係数 $Df^{-1}(f(x)): F\to E$ である．特に，E と F は線型同相である.

証明　一般に集合 A の恒等写像を $1_A: A\to A$ とする．鎖法則から

$$Df^{-1}(f(x))Df(x) = D1_X(x) = 1_E$$
$$Df(x)Df^{-1}(f(x)) = D1_Y(f(x)) = 1_F$$

がわかる．したがって，$Df(x)$は全単射で，その逆写像は $Df^{-1}(f(x))$となる．ゆえに，$Df(x)$は線型同相写像である．▌

さて，以下 E は Banach 空間とし，$L: E\to E$ は線型同相写像とする．$E(b)$, $0<b\leqq\infty$ を，原点を中心とする半径 b の閉球とする．ただし $E(\infty)=E$ と約束する.

正または零の整数 r と，正数 d に対して，$\mathcal{V}_d{}^r(L)$をつぎの3つの条件をみたす写像 $f: E(b)\to E$ 全体の集合とする.

($\mathcal{V}$.1)　f は Lipschitz 写像で，その Lipschitz 定数 $\mathrm{Lip}(f)$ は $\mathrm{Lip}(f)\leqq d$ をみたす.

($\mathcal{V}$.2)　$b<\infty$ なら $\|f\|=\sup\{\|f(x)\|;\ x\in E(b)\}$ として，$\|f\|\leqq bd$，および $\|f(0)\|<(b/2)\|L^{-1}\|^{-1}$ である.

($\mathcal{V}$.3)　$r\geqq 1$ のとき，f は C^r 級である.

さらに，$\mathcal{V}_d{}^r(L)$の部分集合 $\mathcal{U}_d{}^r(L)$をつぎの2つの条件をみたす写像 $f: E(b)\to E$ 全体の集合とする.

($\mathcal{U}$.1)　$f\in\mathcal{V}_d{}^r(L)$

($\mathcal{U}$.2)　f は C^r 有界で一様 C^r 級である.

すると $\mathcal{U}_d{}^r(L)\subset\mathcal{UBC}^r(E(b);E)$でもある.

以上の仮定と記号のもとで，つぎの定理が成立する.

定理 1　$b<\infty$ ならば，d は $0<d\leqq(1/2)\|L^{-1}\|^{-1}$ をみたすものとする．そしてこのとき $b'=(b/2)\|L^{-1}\|^{-1}$ とおく．

$b=\infty$ なら，d は $0<d<\|L^{-1}\|^{-1}$ をみたすものとし，$b'=\infty$ とおく，

このとき，つぎの4つの性質が成り立つ．

(1)　$f\in\mathcal{V}_d{}^r(L)$ に対して，$W_f=(L+f)^{-1}(E(b'))$ は E の原点0の近傍で，$(L+f)|W_f\colon W_f\to E(b')$ は Lipshitz 同相写像である．そして，$\mathrm{Lip}(\{(L+f)|W_f\}^{-1})\leqq(\|L^{-1}\|^{-1}-d)^{-1}$ となる．

(2)　$r\geqq1$ なら，$(L+f)|W_f$ は W_f から $E(b')$ への C^r 微分同相写像である．

(3)　$\{(L+f)|W_f\}^{-1}=L^{-1}+\tilde{f}\colon E(b')\to W_f\subset E$ とおくと，f が C^r 有界なら，$\tilde{f}$ も C^r 有界である．

(4)　$f\in\mathcal{U}_d{}^r(L)$ に対して $\tilde{f}\in\mathcal{BC}^r(E(b');E)$ を対応させる写像は連続である．

この定理の証明の前に簡単な補題を1つ準備しよう．

補題 1　線型同相写像 $L\colon E\to E$ に対して，

$$\|L(x)\|\geqq\|L^{-1}\|^{-1}\|x\|,\qquad x\in E$$

が成立する．

証明　$x\in E$ として $x=L^{-1}(L(x))$ であるから

$$\|x\|\leqq\|L^{-1}\|\|L(x)\|$$

となる．▌

定理1の証明　$f\in\mathcal{V}_d{}^r(L)$ とすると，f は Lipschitz 写像である．したがって，§1 命題2から $L+f$ も Lipschitz 写像である．そして，$x,y\in E(b)$ として，補題1から

$$\begin{aligned}&\|(L+f)(x)-(L+f)(y)\|\\&\quad=\|L(x-y)+f(x)-f(y)\|\\&\quad\geqq\|L(x-y)\|-\|f(x)-f(y)\|\geqq(\|L^{-1}\|^{-1}-\mathrm{Lip}(f))\|x-y\|\end{aligned}$$

となる．仮定から $\|L^{-1}\|^{-1}-\mathrm{Lip}(f)\geqq\|L^{-1}\|^{-1}-d>0$ である．したがって，上の不等式から，$x\neq y$ ならば $(L+f)(x)\neq(L+f)(y)$ となり，$L+f$ は単射である．

いま $(L+f)(E(b))=V$ とし，$x',y'\in V$ とする．そして，$x=(L+f)^{-1}(x')$,

$y=(L+f)^{-1}(y')$とおくと，上の不等式は

$$\|(L+f)^{-1}(x')-(L+f)^{-1}(y')\| \leqq (\|L^{-1}\|^{-1}-\mathrm{Lip}(f))^{-1}\|x'-y'\|$$

と書き直すことができる．したがって，$L+f: E(b)\to V$ は Lipschitz 同相写像で，$\mathrm{Lip}((L+f)^{-1})\leqq(\|L^{-1}\|^{-1}-\mathrm{Lip}(f))^{-1}\leqq(\|L^{-1}\|^{-1}-d)^{-1}$ となる．

以上から，(1)の証明のためには，b' を定理1のようにとれば，$V\supset E(b')$であって，$W_f=(L+f)^{-1}(E(b'))$が0の近傍となることをいえば十分である．

いま，$(y,z)\in E(b')\times E(b/2)$とする．そして，$\mu(y,z)=L^{-1}(y)+z$ とおく．すると，$b<\infty$ ならば，($\mathcal{V}$.2)から

$$\|\mu(y,z)\| \leqq \|L^{-1}\|\|y\|+\|z\| \leqq \|L^{-1}\|b'+b/2 = b/2+b/2 = b$$

となる．すなわち，$\mu(y,z)\in E(b)$である．$b=\infty$ ならば，これは明らかである．したがって，$\mu(E(b')\times E(b/2))\subset E(b)$ であって，定義から，μ は連続線型写像を制限したものである．

つぎに，$T_f(y,z)=-L^{-1}f\mu(y,z)=-L^{-1}f(L^{-1}(y)+z)$とおくと，これはうまく定義できて，$b<\infty$ ならば，($\mathcal{V}$.2)と定理の仮定から

$$\|T_f\| \leqq \|L^{-1}\|\|f\| \leqq \|L^{-1}\|bd \leqq b/2$$

となる．

したがって，$T_f: E(b')\times E(b/2)\to E(b/2)$が定義された．そうして，$(y,z)$，$(y,z')\in E(b')\times E(b/2)$として

$$\begin{aligned}\|T_f(y,z)-T_f(y,z')\| &= \|L^{-1}(f(L^{-1}(y)+z)-f(L^{-1}(y)+z'))\| \\ &\leqq \|L^{-1}\|\,\mathrm{Lip}(f)\|z-z'\|\end{aligned}$$

となる．そして，仮定から$\|L^{-1}\|\mathrm{Lip}(f)\leqq\|L^{-1}\|d<1$ となる．したがって，T_f は第2成分に関して一様縮小で，その一様縮小定数は$\|L^{-1}\|\mathrm{Lip}(f)$となる．

E は Banach 空間で，$E(b/2)$はその閉球だから，完備．したがって，§2定理1から，T_f の不動点写像 $\tilde{f}: E(b')\to E(b/2)$が存在する．すなわち，$\tilde{f}$ は $T_f(y,\tilde{f}(y))=\tilde{f}(y)$，$y\in E(b')$ をみたす．これを書き直すと

$$\tilde{f}(y) = -L^{-1}f(L^{-1}(y)+\tilde{f}(y)), \qquad y\in E(b')$$

となるが，これを書き直すと$(L+f)(L^{-1}+\tilde{f})(y)=y$，$y\in E(b')$となる．したがって，$L^{-1}+\tilde{f}: E(b')\to E(b)$は単射であって，$E(b')\subset(L+f)(E(b))=V$ が

わかる．以上から$(L+f)^{-1}|E(b')=L^{-1}+\tilde{f}$がわかった．

いま$W_f=(L+f)^{-1}(E(b'))=(L^{-1}+\tilde{f})(E(b'))$とおくと，$(\mathcal{V}.2)$から，$b<\infty$として

$$\|(L+f)(0)\| = \|f(0)\| < (b/2)\|L^{-1}\|^{-1} = b'$$

となり，$E(b')$は$(L+f)(0)$の近傍である．したがって，$W_f=(L+f)^{-1}(E(b'))$は0の近傍である．

以上で(1)の証明が終った．

つぎに，fがC^r級$(r\geqq 1)$ならば，$T_f=-L^{-1}f\mu$はC^r級である．したがって，§2定理2から，その不動点写像$\tilde{f}$もC^r級である．これから(2)はすぐわかる．

またfがC^r有界なら，§1命題2からT_fもC^r有界，したがって$\tilde{f}$もC^r有界である．これから(3)が出る．

最後に(4)の証明として，つぎの写像を考える．すなわち

$$T:\ \mathcal{U}_d{}^r(L)\times E(b')\times E(b/2)\to E(b/2),\qquad T(f,y,z)=T_f(y,z)$$

とすると，各$f\in\mathcal{U}_d{}^r(L)$に対して，T_fは第2成分に関して一様縮小で，その一様縮小定数$\|L^{-1}\|\mathrm{Lip}(f)$は$\|L^{-1}\|d<1$でおさえられる．

また$f\in\mathcal{U}_d{}^r(L)$なら，fはC^r有界で一様C^r級だから，μが線型写像の制限(したがってμは一様C^∞級で$D\mu$はC^∞有界)であることに注意すると，§1命題2，命題3から，$f\mu$はC^r有界かつ一様C^r級となる．さらに，§1命題4から，$T_f=-L^{-1}f\mu$はC^r有界かつ一様C^r級となる．したがって，特にDT_fは一様C^{r-1}級である．

つぎに，$f\in\mathcal{U}_d{}^r(L)$に対して$T_f\in\mathcal{BC}^r(E(b')\times E(b/2)\,;E(b/2))$を対応させる写像$\alpha:\mathcal{U}_d{}^r(L)\to\mathcal{BC}^r(E(b')\times E(b/2)\,;E(b/2))$は，定義から，明らかに線型である．そして，$D^k(L^{-1}f\mu)=L^{-1}D^k(f\mu)$, $(k=0,1,\cdots,r)$から，$\|L^{-1}f\mu\|_r\leqq\|L^{-1}\|\|f\mu\|_r$となるが，さらに，§1命題2から

$$\|T_f\|_r=\|L^{-1}f\mu\|_r\leqq\|L^{-1}\|\|f\mu\|_r\leqq\|L^{-1}\|A\|f\|_rM_r(\mu)$$

となる．ここで，Aは定数，$M_r(\mu)=\max\{1,(\|D\mu\|_{r-1})^r\}=\max\{1,(\|L^{1-}\|)^r\}$である．この不等式から，$\alpha$は$\mathcal{BC}^r(E(b)\,;E)$から$\mathcal{BC}^r(E(b')\times E(b/2)\,;E)$への連続線型写像を$\mathcal{U}_d{}^r(L)\subset\mathcal{BC}^r(E(b)\,;E)$に制限したものであることがわ

かる．

以上から，§2定理3を適用すると，$f\in\mathcal{U}_a{}^r(L)$に対して$\tilde{f}\in\mathcal{BC}^r(E(b');E(b/2))$を対応させる写像は連続であることがわかる．▮

定理 2 **(逆関数の定理)** E, F を Banach 空間，A を E の開集合，$h:A\to F$ を C^r 写像$(r\geqq 1)$とする．いま，点 $a\in A$ で h の微係数 $Dh(a):E\to F$ が線型同相写像とすると，a および $h(a)$の適当な近傍 U, V があって $h(U)=V$ で $h|U:U\to V$ は C^r 微分同相写像となる．

証明 この定理は，本質的には定理1に含まれるものであるが，一応証明を与えることにする．

$l_1:E\to E$, $l_2:F\to F$ をそれぞれ $l_1(x)=a+x$, $x\in E$, $l_2(y)=h(a)+y$, $y\in F$ で定義される平行移動とし，$L=Dh(a):E\to F$ とおく．また，$A_0=l_1{}^{-1}(A)$ とおくと，これは E の原点の開近傍である．

いま，$g=L^{-1}l_2{}^{-1}hl_1$，すなわち

$$g(x)=(Dh(a))^{-1}(h(a+x)-h(a)),\qquad x\in A_0$$

とおくと，g は A_0 から E への C^r 写像であって，$g(0)=0$, $Dg(0)=L^{-1}Dh(a)=1$(恒等写像)となる．したがって，$g=1+f$，すなわち $f=g-1$ とおくと，f も C^r 級で $f(0)=0$, $Df(0)=Dg(0)-1=0$ となる．

Df は連続だから，十分小さな $b>0$ をとると，$E(b)\subset A_0$ で

$$\|x\|\leqq b \quad \text{ならば} \quad \|Df(x)\|\leqq 1/2$$

とできる．すると，§2補題1から，$f|E(b)$は Lipschitz 写像で，$\mathrm{Lip}(f|E(b))\leqq 1/2$ となる．また $f(0)=0$ だから

$$\|x\|\leqq b \quad \text{ならば} \quad \|f(x)\|=\|f(x)-f(0)\|\leqq(1/2)\|x\|\leqq b/2$$

となる．したがって，定理1から E の原点0の適当な近傍 $W_0\subset A_0$ と，定数 b', $(0<b'\leqq\infty)$があって，$g=1+f:W_0\to E(b')$は C^r 微分同相写像である．

定義から $h=l_2Lgl_1{}^{-1}$ となるが，$U=l_1(W_0)$, $V=l_2L(E(b'))$とおくと，これらは，それぞれ $l_1(0)=a$, $l_2L(0)=h(a)$の近傍で，$U=l_1(W_0)\subset l_1(A_0)=A$ で，$h(U)=l_2Lgl_1{}^{-1}l_1(W_0)=V$ であって，$h|U:U\to V$ は C^r 微分同相写像となる．▮

定理 3 **(陰関数の定理)**　E, F, G を Banach 空間，A を $E\times F$ の開集合，$f: A\to G$ を C^r 写像とする($r\geqq 1$)．いま，A の点(x_0, y_0)で $f(x_0, y_0)=0$ で，さらに，f の第2変数に関する偏微係数 $D_2f(x_0, y_0): F\to G$ が線型同相写像とする．このとき，x_0, y_0 の適当な近傍 B_1, B_2 と，写像 $g: B_1\to B_2$ があって，つぎの性質が成立する．

(1)　$B_1\times B_2\subset A$

(2)　$g(x_0)=y_0$　で　$f(x, g(x))=0,\quad x\in B_1$

(3)　$(x, y)\in B_1\times B_2$　で　$f(x, y)=0$　ならば　$y=g(x)$

(4)　g は C^r 級でその微係数 $Dg(x): E\to F,\ x\in B_1$ は

$$Dg(x)=-(D_2f(x, g(x)))^{-1}Df(x, g(x))$$

で与えられる．

この定理を証明する前に，2つの重要な系を示すことにする．

系 1　E, F_1, F_2 を Banach 空間，A を E の開集合で原点0を含むものとする．いま，$f: A\to F_1\times F_2$ が C^r 級で($r\geqq 1$)，$f(0)=(0, 0)$をみたし，さらに，原点における微係数 $Df(0): E\to F_1\times F_2$ が E から $F_1=F_1\times\{0\}$ の上への線型同相写像とする．すると，$(0, 0)\in F_1\times F_2$ の適当な近傍 U, V およびこれらの間の原点を保つ適当な C^r 微分同相写像 $g: U\to V$ があって，$gf: A\cap f^{-1}(U)\to F_1\times F_2$ の像は $F_1\times\{0\}$ に含まれ，そしてさらに，gf が E の原点の近傍から $F_1=F_1\times\{0\}$ の原点の近傍への C^r 微分同相写像となる．

証明　E と F_1 が線型同相であるから，$E=F_1$ と同一視する．いま，$h: A\times F_2\to F_1\times F_2$ を $h(x, y)=f(x)+(0, y)$，$(x, y)\in A\times F_2$ と定義する．すると，h は C^r 級で $h(0, 0)=(0, 0)$，そして h の原点$(0, 0)$における微係数 $Dh(0, 0): F_1\times F_2\to F_1\times F_2$ は，$Dh(0, 0)(u, v)=Df(0)(u)+(0, v)$，$(u, v)\in F_1\times F_2$ で与えられる．この式と $Df(0)$が線型同相という仮定から，$Dh(0, 0)$は線型同相となる．したがって，逆関数の定理から，h は原点の適当な近傍 V から同じく原点の適当な近傍 U の上への C^r 微分同相写像である．そして，定義から $h(A\times\{0\})=f(A)$となる．そこで，いま $g: U\to V$ を $h|U: U\to V$ の逆写像とすると，$gf(A\cap f^{-1}(U))\subset A\times\{0\}$ となり，$gf(x)=x$，$x\in A\cap f^{-1}(U)$となる．∎

系 2 E_1, E_2, F を Banach 空間とする．A を $E_1\times E_2$ の開集合で原点$(0,0)$を含むものとする．いま，$f: A\to F$ を C^r 級$(r\geqq 1)$とし，$f(0,0)=0$ で，その原点$(0,0)$における微係数 $Df(0,0): E_1\times E_2\to F$ は全射で，その核 $\mathrm{Ker}\, Df(0,0)$は $E_2=\{0\}\times E_2$ とする．このとき，$Df(0,0)$は $E_1\times\{0\}$ と F の間の線型同相写像をひき起こす．そこで，F と $E_1=E_1\times\{0\}$ を同一視することにして，つぎのことが成り立つ．

原点$(0,0)$の $E_1\times E_2$ における適当な近傍 U, V と適当な C^r 微分同相写像 $g: U\to V$ があって，$fg: U\cap g^{-1}(A)\to F=E_1$ は第1成分への射影となる．すなわち

$$fg(x,y)=x, \qquad (x,y)\in U\cap g^{-1}(A)\subset E_1\times E_2$$

となる．

証明 系2の仮定から，$Df(0,0)$が $E_1=E_1\times\{0\}$ と F の間の線型同相写像となることはすぐわかる．したがって，E_1 と F を同一視することにする．

いま $h: A\to E_1\times E_2$ を $h(x,y)=(f(x,y),y)$，$(x,y)\in A$ と定義すると，h は C^r 級で，$h(0,0)=(0,0)$となる．そして h の原点における微係数 $Dh(0,0)$: $E_1\times E_2\to E_1\times E_2$ は $Dh(0,0)(u,v)=(Df(0,0)(u,v),v)$，$(u,v)\in E_1\times E_2$ で与えられる．$Df(0,0)(u,v)=D_1f(0,0)(u)+D_2f(0,0)v$ となることおよび仮定から，$D_1f(0,0): E_1\to F=E_1$ が線型同相写像となることから，$Dh(0,0)$が線型同相となる．したがって，逆関数の定理から，$(0,0)$の適当な近傍 V, U があって h は V から U への C^r 微分同相写像となる．そこで，この逆写像を g: $U\to V$ とすると，これが求めるものである．なんとなれば，$hg(x,y)=(x,y)$ の両辺の第1成分を比較して，$fg(x,y)=x$ を得るからである．▌

定理3の証明 簡単のため，$(x_0,y_0)=(0,0)$の場合を証明する．一般の場合は，定理2と同様に平行移動を用いて証明できるからである．

いま，$L=D_2f(0,0): F\to G$ とし，$h: A\to F$ を $h(x,y)=y-L^{-1}f(x,y)$，$(x,y)\in A$ と定義する．すると，h は C^r 級で，$h(0,0)=-L^{-1}f(0,0)=0$，$D_2h(0,0)=1-L^{-1}D_2f(0,0)=0$ となる．また，定義式から，つぎの(a)が成立する．

(a)　$h(x,y)=y \rightleftarrows f(x,y)=0$

特に，$f(0,0)=0$ から，$h(0,0)=0$ となる．

定数 k を $0<k<1/2$ にとる．D_2h の連続性と $D_2h(0,0)=0$ から，適当な $\alpha'>0$，$\beta>0$ をとると，$E(\alpha')\times F(\beta)\subset A$ であって，$\|x\|\leqq\alpha'$，$\|y\|\leqq\beta$ ならば $\|D_2h(x,y)\|\leqq k$ が成立するようにできる．

また，$f(x,0)$ の連続性と $f(0,0)=0$ から，適当な $\alpha''>0$ に対して，$E(\alpha'')\times\{0\}\subset A$ および $\|x\|\leqq\alpha''$ なら $\|f(x,0)\|\leqq\beta/(2\|L^{-1}\|)$ が成立する．

いま $\alpha=\min(\alpha',\alpha'')>0$ とし，$\|x\|\leqq\alpha$，$\|y\|\leqq\beta$ とすると，上の条件と平均値の定理(または§2補題1)から

$$\begin{aligned}\|h(x,y)\| &\leqq \|h(x,y)-h(x,0)\|+\|h(x,0)\| \\ &\leqq k\|y\|+\|L^{-1}f(x,0)\| \leqq k\beta+\|L^{-1}\|\|f(x,0)\| \\ &\leqq \beta/2+\beta/2=\beta\end{aligned}$$

となる．したがって，$h(E(\alpha)\times F(\beta))\subset F(\beta)$ である．すなわち，$h|E(\alpha)\times F(\beta):E(\alpha)\times F(\beta)\to F(\beta)$ となる．

ここで，$h|E(\alpha)\times F(\beta)$ は，$\|D_2h(x,y)\|\leqq k\leqq 1/2$，$(x,y)\in E(\alpha)\times F(\beta)$ という条件から，第2成分に関して一様縮小となる(§2補題1)．また，F が Banach 空間で，$F(\beta)$ は閉球だから完備，したがって，§2定理1から $h|E(\alpha)\times F(\beta)$ の不動点写像 $g:E(\alpha)\to F(\beta)$ が存在する．すなわち，$h(x,g(x))=g(x)$，$x\in E(\alpha)$ となる．これは，(a)から，$f(x,g(x))=0$，$x\in E(\alpha)$ と同値である．また，h が C^r 級だから，§2定理2によって，g も C^r 級である．さらに，$h(0,0)=0$ から $g(0)=0$ となる．

つぎに，$f(x,y)=0$，$(x,y)\in E(\alpha)\times F(\beta)$ とすると，(a)から $h(x,y)=y$ となる．したがって，$h|E(\alpha)\times F(\beta)$ の不動点の一意性から，$y=g(x)$ となる．

最後に，g の微係数は，§2定理2と h の定義から，つぎのように計算される．

$$\begin{aligned}Dg(x) &= \{1-D_2h(x,g(x))\}^{-1}D_1h(x,g(x)) \\ &= \{L^{-1}D_2f(x,g(x))\}^{-1}(-L^{-1}D_1f(x,g(x))) \\ &= -(D_2f(x,g(x)))^{-1}D_1f(x,g(x)), \qquad x\in E(\alpha) \quad ▮\end{aligned}$$

§4　常微分方程式の解の存在定理

ここでは，§2の理論の応用として，常微分方程式の解の局所的な存在と一意性に関する定理，その解が初期条件に関してどのように依存するか，などの問題を考察する．

E を実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ の上の Banach 空間，A をその部分集合とする．このとき，写像 $f: A \to E$ を A の**ベクトル場**という．J を実数の区間で，原点 $0 \in \boldsymbol{R}$ をその内部に含むものとする．いま，C^r 写像 $\alpha: J \to A \subset E$, $r \geqq 1$ が，つぎの条件(1)をみたすとき，これを**ベクトル場 f の(C^r)積分曲線**という．

(1)　$D\alpha(t) = f(\alpha(t))$,　　$t \in J$

ここで，$E = \mathcal{L}(\boldsymbol{R}; E)$ と同一視する．

この条件(1)は α がつぎの**常微分方程式(自励系)(1)′ の解**ということでもある．

(1)′　$Dx = f(x)$,　　$x: J \to A \subset E$

ベクトル場 $f: A \to E$ の積分曲線 $\alpha: J \to A$ に対して，$\alpha(0) \in A$ を α の**初期条件**という．

補題 1　上と同じ仮定と記号のもとで，連続写像 $\alpha: J \to A$ が連続なベクトル場 $f: A \to E$ の積分曲線であって，初期条件が $x_0 \in A$ となるための必要十分条件は，α がつぎの条件(2)をみたすことである．

(2)　$\alpha(t) = x_0 + \int_0^t f(\alpha(s))ds$,　　$t \in J$

証明　(1)が成立すれば，第5章§4定理3から

$$\int_0^t f(\alpha(s))ds = \alpha(t) - \alpha(0), \qquad t \in J$$

が成り立つ．したがって，$\alpha(0) = x_0$ ならば(2)が成立する．

逆に(2)が成り立てば，同じ定理から，$\alpha(t)$ は $f(\alpha(t))$ の原始関数で，したがって C^1 級である．すなわち，α は f の積分曲線で，(2)から $\alpha(0) = x_0$ は明らかである．▌

注意　$1 \leqq r \leqq \infty$ として，C^r 級ベクトル場 $f: A \to E$ の C^1 級積分曲線を $\alpha: J \to A \subset E$ とすると，(1)式から帰納的に，α が C^{r+1} 級となることが証明できる.

Banach 空間 E の点 p を中心とする半径 b, b' の E の閉球を B, B' とする. そして，$0<b<b'<\infty$ か，または $b=b'=\infty$ ($b=b'=\infty$ のときは $B=B'=E$) とする.

いま，B' のベクトル場 $f: B' \to E$ が Lipschitz 写像とする．すると，$b'<\infty$ ならば $\|f(x)\| \leqq \|f(x)-f(p)\| + \|f(p)\| \leqq \mathrm{Lip}(f)\|x-p\| + \|f(p)\| \leqq b'\mathrm{Lip}(f) + \|f(p)\|$ となるから，$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|;\ x \in B'\}$ は有限となる.

さて，実数 a を $0<a<(\mathrm{Lip}(f))^{-1}$ にとる．さらに，$b'<\infty$ のときは $0<a<\|f\|^{-1}(b'-b)$ とする．ただし，$0^{-1}=\infty$，$0^{-1}(b'-b)=\infty$ とする．このように a をとり，$I=[-a, a]$ とおく.

定理 1　**(常微分方程式の解の存在と一意性)**　以上の仮定と記号のもとで，つぎの条件(＊)をみたす写像 $\phi: I \times B \to B'$ がただ1つ存在する.

(＊)　B の各点 x に対して $\phi^x: I \to B'$ を $\phi^x(t) = \phi(t, x)$，$t \in I$ とおくと，ϕ^x は初期条件を x とするベクトル場 f の積分曲線である.

さらに，各 $t \in I$ に対して $\phi_t: B \to B'$ を $\phi_t(x) = \phi(t, x)$，$x \in B$ とおくと，ϕ_t は Lipschitz 写像である.

また，f が C^r 級($r \geqq 1$)ならば，$\phi_t, t \in I$ も C^r 級である.

証明　$I=[-a, a]$ はコンパクトだから，I で定義された C^0 写像はすべて C^0 有界である．そして，B' は Banach 空間の閉球だから完備，したがって，第2章§8定理5から $\mathcal{BC}^0(I; B')$ も完備である.

いま，$(x, \alpha) \in B \times \mathcal{BC}^0(I; B')$ に対して

$$T(x, \alpha)(t) = x + \int_0^t f(\alpha(s))ds, \qquad t \in I$$

とおく．すると，I がコンパクトで，α, f は連続，さらに，第2章§1命題2から，ノルムによって定義される写像 $\|\cdot\|: E \to \boldsymbol{R}$ は連続．したがって，第2章§6定理8から，$M = \sup\{\|f(\alpha(t))\|;\ t \in I\}$ は有限である.

いま，$t, t' \in I$ とすると，第5章§4定理2から

$$\|T(x,\alpha)(t)-T(x,\alpha)(t')\| = \left\|\int_{t'}^{t} f(\alpha(s))ds\right\|$$
$$\leqq \left|\int_{t'}^{t} \|f(\alpha(s))\|ds\right| \leqq M|t-t'|$$

となる．したがって，$T(x,\alpha): I\to E$ は連続である．

また，$b'<\infty$ ならば，$b<\infty$ で，仮定から

$$\|T(x,\alpha)(t)-p\| \leqq \|x-p\|+\left\|\int_{0}^{t} f(\alpha(s))ds\right\|$$
$$\leqq b+\left|\int_{0}^{t} \|f(\alpha(s))\|ds\right| \leqq b+\|f\||t|$$
$$\leqq b+\|f\|a \leqq b+(b'-b) = b'$$

が成立する．すなわち，$T(x,\alpha)\in \mathcal{BC}^0(I;B')$ である．したがって，$T: B\times \mathcal{BC}^0(I;B')\to\mathcal{BC}^0(I;B')$ が定義できた．

ここで，この T の定義と補題1から，$T(x,\alpha)=\alpha$ となる α が，f の積分曲線で初期条件を x とするものであることに注意する．

さて，そこで T が第2成分に関して一様縮小であることを示そう．

いま，$(x,\alpha), (x,\beta)\in B\times\mathcal{BC}^0(I;B')$，$t\in I$ とすると

$$\|T(x,\alpha)(t)-T(x,\beta)(t)\|$$
$$=\left\|\int_{0}^{t} (f(\alpha(s))-f(\beta(s)))ds\right\|$$
$$\leqq \left|\int_{0}^{t} \|f(\alpha(s))-f(\beta(s))\|ds\right| \leqq \left|\int_{0}^{t} \mathrm{Lip}(f)\|\alpha(s)-\beta(s)\|ds\right|$$
$$\leqq \mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\||t| \leqq a\,\mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\|$$

となる．したがって，t に関する上限をとって，つぎの式を得る．

$$\|T(x,\alpha)-T(x,\beta)\| \leqq a\,\mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\|$$

仮定から $a\,\mathrm{Lip}(f)<1$ であるから，T は第2成分に関して一様縮小である．

初めに示したように，$\mathcal{BC}^0(I;B')$ は完備だから，§2定理1から，T の不動点写像 $g: B\to\mathcal{BC}^0(I;B')$ がただ1つ存在する．すなわち，$T(x,g(x))=g(x)$，$x\in B$ である．したがって，$g(x): I\to B'$ は初期条件を x とする f の積分曲線である．

そこで，$\phi: I\times B\to B'$ を $\phi(t,x)=g(x)(t)$，$(x,t)\in I\times B$ とおくと，$\phi^x: I\to B'$ は $g(x)$ と一致し，定理の条件(＊)が証明された．そして，ϕ の一意性は，g の一意性からすぐわかる．

つぎに，$(x,\alpha),(y,\beta)\in B\times\mathcal{BC}^0(I;B')$ とすると，前と同様にして，$t\in I$ に対して

$$\|T(x,\alpha)(t)-T(y,\beta)(t)\|\leqq\|x-y\|+\left\|\int_0^t(f(\alpha(s))-f(\beta(s)))ds\right\|$$
$$\leqq\|x-y\|+a\,\mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\|$$

を得る．したがって，$a\,\mathrm{Lip}(f)<1$ に注意すると

$$\|T(x,\alpha)-T(y,\beta)\|\leqq\|x-y\|+a\,\mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\|$$
$$\leqq 2\max\{\|x-y\|,\|\alpha-\beta\|\}$$

を得る．すなわち，T は Lipschitz 写像である．したがって，§2 定理2から，T の不動点写像 g も Lipschitz 写像である．

いま，$\mathrm{ev}^t:\mathcal{BC}^0(I;E)\to E,\ (t\in I)$ を $\mathrm{ev}^t(\alpha)=\alpha(t)$，$\alpha\in\mathcal{BC}^0(I;E)$ で定まる連続線型写像とする(§1 命題9の系)．すると，定義から $\phi_t=\mathrm{ev}^t g$，$t\in I$ となる．したがって，ϕ_t も Lipschitz 写像である．

最後に，f が C^r 級($r\geqq1$)とする．すると，§1 定理1から，$f_*(\alpha)=f\alpha$，$\alpha\in\mathcal{BC}^0(I;B')$ によって定まる写像 $f_*:\mathcal{BC}^0(I;B')\to\mathcal{BC}^0(I;E)$ は C^r 級である．そして，$\alpha\in\mathcal{BC}^0(I;E)$ に対して $\sigma(\alpha)(t)=\int_0^t\alpha(s)ds$，$t\in I$ とおくと，$\sigma(\alpha): I\to E$ は連続(実は C^1 級)で，

$$\|\sigma(\alpha)(t)\|\leqq\left|\int_0^t\|\alpha(s)\|ds\right|\leqq\|\alpha\||t|\leqq a\|\alpha\|$$

となる．したがって，$\|\sigma(\alpha)\|\leqq a\|\alpha\|$ である．したがって，この σ は $\mathcal{BC}^0(I;E)$ から $\mathcal{BC}^0(I;E)$ への連続線型写像となる．

一方，T の定義式から，$T(x,\alpha)=x+\sigma f_*(\alpha)$，$(x,\alpha)\in B\times\mathcal{BC}^0(I;B')$ となるが，以上の考察から，f が C^r 級なら T も C^r 級である．したがって，§2 定理2から g は C^r 級となり，$\phi_t=\mathrm{ev}^t g$ も C^r 級となる．▌

定理 2 前定理と同じ仮定と記号のもとで，さらに，f が C^r 級($r\geqq1$)とす

ると，$\phi : I\times B \to B'$ は C^r 級である．

いま，ϕ を第2変数に関して r 回偏微分して得られる ϕ の r 次偏導関数 $(D_2)^r\phi : I\times B \to \mathcal{L}^r(E;E)$ を，さらに第1変数に関して偏微分したものを $D_1(D_2)^r\phi : I\times B \to \mathcal{L}(\boldsymbol{R};\mathcal{L}^r(E;E)) = \mathcal{L}^r(E;E)$ とすると，これは存在して，$f\phi : I\times B \to E$ を 第2変数に関して r 回偏微分した $(D_2)^r(f\phi) : I\times B \to \mathcal{L}^r(E;E)$ と一致する．

また，$b'<\infty$ で，f が C^r 有界なら，ϕ は C^r 有界となる．

証明　最初，$\mathrm{Lip}(f)<1$ として定理を証明しよう．

定理1のときと同様に，I がコンパクトだから，I 上の C^1 写像はすべて C^1 有界となる．さて，これから定理1の証明と同じ記号を用いることにする．

$T : B\times \mathcal{BC}^0(I;B') \to \mathcal{BC}^0(I;B')$ の定義式

$$T(x,\alpha)(t) = x+\int_0^t f(\alpha(s))ds, \qquad t\in I,\ \ (x,\alpha)\in B\times \mathcal{BC}^0(I;B')$$

から，$T(x,\alpha)$ は $f\alpha$ の原始関数である．したがって，C^1 級である．特に，$T(B\times\mathcal{BC}^1(I;B'))\subset \mathcal{BC}^1(I;B')$ となる．

いま，$T'=T|B\times\mathcal{BC}^1(I;B') : B\times\mathcal{BC}^1(I;B') \to \mathcal{BC}^1(I;B')$ とおく．そして，$x\in B$ に対して $T_x' : \mathcal{BC}^1(I;B')\to\mathcal{BC}^1(I;B')$ を $T_x'(\alpha)=T(x,\alpha)$, $\alpha\in\mathcal{BC}^1(I;B')$ と定義する．すると，定理1の証明から

$$\|T_x'(\alpha)-T_x'(\beta)\| = \|T(x,\alpha)-T(x,\beta)\| \leqq a\,\mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\|$$

となる．また

$$\begin{aligned}\|D(T_x'(\alpha))(t)-D(T_x'(\beta))(t)\| &= \|f(\alpha(t))-f(\beta(t))\| \leqq \mathrm{Lip}(f)\|\alpha(t)-\beta(t)\|\\ &\leqq \mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\|\end{aligned}$$

から，

$$\|D(T_x'(\alpha))-D(T_x'(\beta))\| \leqq \mathrm{Lip}(f)\|\alpha-\beta\|$$

となる．

仮定から，$a\,\mathrm{Lip}(f)<1$, $\mathrm{Lip}(f)<1$ であるが，いま，$k=\max\{a\,\mathrm{Lip}(f), \mathrm{Lip}(f)\}$ とおくと，$k<1$ で，上の不等式から

$$\|T_x'(\alpha)-T_x'(\beta)\|_1 \leqq k\|\alpha-\beta\| \leqq k\|\alpha-\beta\|_1, \qquad \alpha,\beta\in\mathcal{BC}^1(I;B')$$

となる．したがって，T' は第2成分に関して一様縮小である．

定理1の証明にある T の不動点写像 $g: B \to \mathcal{BC}^0(I; B')$は，$g(x)=T(x, g(x))$，$x \in B$ をみたすが，$T(x, \alpha)$，$(x, \alpha) \in B \times \mathcal{BC}^0(I; B')$が C^1 級であるという最初の注意から，$g(x) \in \mathcal{BC}^1(I; B')$となる．したがって，$g$ は自然に

$$g': B \to \mathcal{BC}^1(I; B')$$

をひき起こす．そして，これは明らかに T' の不動点写像である．

さて，ここで f が C^r 級$(r \geqq 1)$のとき，T' が C^r 級となることをいう．

いま，$i: \mathcal{BC}^1(I; B') \to \mathcal{BC}^0(I; B')$を包含写像とすると，これは連続線型写像の制限である．したがって，i は C^∞ 級である．

また，前定理の証明にあった連続線型写像 $\sigma: \mathcal{BC}^0(I; E) \to \mathcal{BC}^0(I; E)$の像は $\mathcal{BC}^1(I; E)$に含まれる．したがって，これは自然に

$$\sigma': \mathcal{BC}^0(I; E) \to \mathcal{BC}^1(I; E)$$

をひき起こす．そして，定義から $D(\sigma'(\alpha))=\alpha$ であるが，前定理の証明から

$$\|\sigma'(\alpha)\|_1 = \max\{\|\sigma(\alpha)\|, \|\alpha\|\} \leqq \max\{a\|\alpha\|, \|\alpha\|\} = \max\{a, 1\}\|\alpha\|$$

がわかる．したがって，σ' も連続線型写像である．

定理1の証明にもあるように，f が C^r 級$(r \geqq 1)$ならば，$f_*: \mathcal{BC}^0(I; B') \to \mathcal{BC}^0(I; E)$は C^r 級であるが，以上の事実と

$$T'(x, \alpha) = x + \sigma' f_* i(\alpha), \qquad (x, \alpha) \in B \times \mathcal{BC}^1(I; B)$$

と表わせることから，T' が C^r 級となることは明らかである．

以上で，f が C^r 級$(r \geqq 1)$なら，T' が C^r 級となることがわかった．さらに§2定理2から，T' の不動点写像 g' も C^r 級となる．

定理1の証明からわかるように，$\phi: I \times B \to B'$ はつぎの写像の合成である．

$$I \times B \xrightarrow{1 \times g'} I \times \mathcal{BC}^1(I; B') \xrightarrow{\text{ev}} B'$$

ここで ev は§1定理2系から C^1 級である$(\text{ev}(t, \alpha)=\alpha(t)$，$(t, \alpha) \in I \times \mathcal{BC}^1(I; B'))$．したがって，$g'$ が C^r 級$(r \geqq 1)$であることと合わせて，ϕ が C^1 級であることがわかった．

以下，帰納法によって ϕ が C^r 級であることを証明しよう．そこで，$1 \leqq k < r$ として，ϕ が C^k 級と仮定する．そして ϕ が C^{k+1} 級となることを証明しよう．

このためには，ϕ の k 次の偏導関数が，すべて C^1 級であることをいえば十分である(第5章§2定理1,2)．一方，ϕ の k 次偏導関数は，第5章§3定理2から

$$(D_2)^{k-i}(D_1)^i(\phi), \qquad i=0,1,\cdots,k$$

のどれかと一致する．

$\phi^x: I\to B'$, $(\phi^x(t)=\phi(t,x)$, $(t,x)\in I\times B)$がベクトル場 $f: B'\to E$ の積分曲線であることから，$D_1\phi=f\phi$ が成立する．したがって，ϕ の k 次偏導関数は，$(D_2)^k\phi$ を除いて，$D_1\phi=f\phi$ の$(k-1)$次偏導関数と一致する．一方，ϕ が C^k 級で f が C^r 級$(k<r)$という仮定から，$f\phi$ は C^k 級となる．以上から，$(D_2)^k\phi$ 以外の ϕ の k 次偏導関数はすべて C^1 級である．

つぎに，$f\phi$ が C^k 級だから，$(D_2)^k(D_1\phi)=(D_2)^k(f\phi)$は存在し，連続となる．そして，第5章§4定理3,5から

$$\begin{aligned}(D_2)^kD_1\phi(t,x) &= D_1\left(\int_0^t (D_2)^kD_1\phi(s,x)ds\right)\\ &= D_1(D_2)^k\int_0^t D_1\phi(s,x)ds = D_1(D_2)^k(\phi(t,x)-\phi(0,x))\\ &= D_1(D_2)^k\phi(t,x)\end{aligned}$$

となる．すなわち，$(D_2)^kD_1\phi=D_1(D_2)^k\phi$ となる．したがって，$D_1(D_2)^k\phi$ が存在して，$(D_2)^kD_1\phi=(D_2)^kf\phi$ と一致する．そして，上の注意から $D_1(D_2)^k\phi$ は連続である．

以上から，$(D_2)^{k+1}\phi$ が存在して連続となることを示せば，第5章§2定理1から，$(D_2)^k\phi$ が C^1 級となり，したがって，ϕ が C^{k+1} 級となることが証明される．

さて，定義から $\phi_t, t\in I$ はつぎの写像の合成である．

$$B \xrightarrow{g'} \mathcal{BC}^1(I;B') \xrightarrow{\mathrm{ev}^t} B'$$

ここで，$\mathrm{ev}^t(\alpha)=\alpha(t)$，$\alpha\in\mathcal{BC}^1(I;B')$であって，§1命題9系からこれは連続線型写像の制限である．

g' が C^r 級で，$k+1\leqq r$ に注意すると，第5章§3命題4から

$$(D_2)^{k+1}\phi(t,x)=(D_2)^{k+1}(\mathrm{ev}^t g')=\mathrm{ev}^t(D_2{}^{k+1}g')$$

が存在する．そして，$(D_2)^{k+1}\phi$ はつぎの写像の合成である．

$$I\times B\xrightarrow{\mathrm{ev}^{\cdot}\times D^{k+1}g'}\mathcal{L}(\mathcal{BC}^1(I;E);E)\times\mathcal{L}^{s+1}(E;\mathcal{BC}^1(I;E))$$
$$\xrightarrow{\mathrm{comp}}\mathcal{L}^{s+1}(E;E)$$

ここで $\mathrm{ev}^{\cdot}:I\to\mathcal{L}(\mathcal{BC}^1(I;E);E)$ は $\mathrm{ev}^{\cdot}(t)=\mathrm{ev}^t$，$t\in I$ で定義され，§1 命題 9 系から連続である．また，comp は写像の合成によって定義される連続 2 重線型写像である．そして，$D^{k+1}g'$ は連続だから，上の写像の合成である $(D_2)^{k+1}\phi$ も連続となる．

以上で ϕ が C^{k+1} 級の証明が終った．したがって，帰納的に，ϕ が C^r 級であること，および $D_1(D_2)^r\phi$ が存在して $(D_2)^r(f\phi)$ に一致することがわかった．

つぎに，$b'<\infty$ で，f が C^r 有界 $(r\geqq 1)$ とすると，$T':B\times\mathcal{BC}^1(I;B')\to\mathcal{BC}^1(I;B')$，$T'(x,\alpha)=x+\sigma' f_* i(\alpha)$，$(x,\alpha)\in B\times\mathcal{BC}^1(I;B')$ は，§1 命題 8, 2, 4 から，C^r 有界となる．したがって，§2 定理 2 から，T' の不動点写像 g' も C^r 有界となる．さらに，§1 定理 2 と $b'<\infty$ を用いて $\mathrm{ev}:I\times\mathcal{BC}^1(I;B')\to B'$，$\mathrm{ev}(t,\alpha)=\alpha(t)$，$(t,\alpha)\in I\times\mathcal{BC}^1(I;B')$ が C^1 有界となる．以上を用いると，前の証明と全く同様に，ϕ が C^r 有界となることが証明できる．

これで $\mathrm{Lip}(f)<1$ のときの定理の証明が終った．

最後に，$\mathrm{Lip}(f)\geqq 1$ のときは，$0<l\,\mathrm{Lip}(f)<1$ となるような実数 l, $(l>0)$ をとり，$\tilde{f}=lf$ とおく．すると，$\tilde{f}$ は Lipschitz 写像で $\mathrm{Lip}(\tilde{f})=l\,\mathrm{Lip}(f)<1$ となる．そして，$\|f\|<\infty$ なら $\|\tilde{f}\|=l\|f\|$ となる．したがって，$\tilde{f}$ については，$\tilde{a}=l^{-1}a$，$\tilde{I}=[-\tilde{a},\tilde{a}]$ として，定理の条件をみたす $\tilde{\phi}:\tilde{I}\times B\to B'$ が存在する．

一方，$x\in B$ を初期条件とする $\tilde{f}$ の積分曲線を $\tilde{\alpha}(t)$ とすると，$\alpha(t)=\tilde{\alpha}(l^{-1}t)$ は x を初期条件とする f の積分曲線となる(鎖法則)．そして，$\tilde{\alpha}$ の定義域が $\tilde{I}=[-\tilde{a},\tilde{a}]$ なら，α の定義域は $l\tilde{I}=[-l\tilde{a},l\tilde{a}]=[-a,a]$ となる．

したがって，$\phi:I\times B\to B'$ を $\phi(t,x)=\tilde{\phi}(l^{-1}t,x)$，$(t,x)\in I\times B$ とおくと，これが f に対して定理の条件をみたすものであることがわかる．▌

以上で C^r 級ベクトル場の積分曲線の局所的な存在と一意性，および，その解の初期条件に関する C^r 依存性がわかった．

以下 $b'<\infty$ として，ベクトル場 $f:I\to B'$ を変化させたときの解の変り方をしらべることにする．

正数 k,l に対して $\mathcal{UBC}^r(B';E)$, $r\geqq 1$ の部分集合 $\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ を，つぎの 3 つの条件をみたす C^r 写像 $f:B'\to E$ 全体の集合とする．

(1) f は Lipschitz 写像で，その Lipschitz 定数は $\mathrm{Lip}(f)\leqq k$ をみたす．

(2) $\|f\|\leqq l$

(3) f は C^r 有界で一様 C^r 級．

以上のとき，実数 a を $0<a<\min\{k^{-1}, l^{-1}(b'-b)\}$ をみたすように定める．すると $f\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ に対して

$$0<a<k^{-1}\leqq(\mathrm{Lip}(f))^{-1},\qquad 0<a<l^{-1}(b'-b)\leqq\|f\|^{-1}(b'-b)$$

が成立する．したがって，$I=[-a,a]$ とおくと，任意の $f\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ に対して，定理 1 の $\phi^{(f)}:I\times B\to B'$ が定まる．そして，各 $t\in I$ に対して，$\phi_t{}^{(f)}(x)=\phi^{(f)}(t,x)$, $x\in B$ によって定まる写像 $\phi_t{}^{(f)}:B\to B'$ は，定理 2 (または下の定理 3 の証明の途中の議論から，定理 1 と同様にしてわかる) から，C^r 有界である．

そこで，各 $t\in I$ に対して，写像 $C_t:\mathcal{U}_{k,l}{}^r\to\mathcal{BC}^r(B;B')$ を $C_t(f)=\phi_t{}^{(f)}$ によって定義することができるが，この C_t について，つぎの定理が成立する．

定理 3 $C_t:\mathcal{U}_{k,l}{}^r\to\mathcal{BC}^r(B;B')$, $t\in I$ は連続である．

証明 いま，$T':\mathcal{U}_{k,l}{}^r\times B\times\mathcal{BC}^0(I;B')\to\mathcal{BC}^0(I;B')$ を

$$T'(f,x,\alpha)=x+\int_0^t f(\alpha(s))ds,\qquad (f,x,\alpha)\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r\times B\times\mathcal{BC}^0(I;B')$$

と定義する (以下定理 1 の証明と同じ記号を用いることにする)．

$$f\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r\quad に対して\quad T_f':B\times\mathcal{BC}^0(I;B')\to\mathcal{BC}^0(I;B')$$

を

$$T_f'(x,\alpha)=T'(f,x,\alpha),\qquad (x,\alpha)\in B\times\mathcal{BC}^0(I;B')$$

とすると，定理 1 の証明から，T_f' は第 2 成分に関して一様縮小で，その一様縮小定数は $a\,\mathrm{Lip}(f)$ である．そして仮定から $a\,\mathrm{Lip}(f)\leqq ak<1$ となる．

いま $f\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ とし，$f_*(\alpha)=f\alpha$, $\alpha\in\mathcal{BC}^0(I;B')$ とすると，これは写像 f_*:

$\mathcal{BC}^0(I;B')\to\mathcal{BC}^0(I;E)$を定めるが，$f$ が C^r 有界かつ一様 C^r 級であることから，§1定理1および§1命題8によって，f_* は C^r 有界かつ一様 C^r 級となる．さらに，$f\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ に対して $f_*\in\mathcal{BC}^r(\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;E))$を対応させる写像 $\lambda:\mathcal{U}_{k,l}{}^r\to\mathcal{BC}^r(\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;E))$は，§1命題8から連続線型写像を $\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ に制限したものである．

定理1の証明の中にあった，積分によって定まる連続線型写像 $\sigma:\mathcal{BC}^0(I;E)\to\mathcal{BC}^0(I;E)$ を用いて

$$T_f'(x,\alpha)=x+\sigma f_*(\alpha),\qquad (x,\alpha)\in B\times\mathcal{BC}^0(I;B')$$

と表わせる．したがって，§1命題4と $b'<\infty$ を用いて，T_f' が C^r 有界かつ一様 C^r 級となる．ゆえに，§2定理2によって，T_f' の不動点写像 $g_f:B\to\mathcal{BC}^0(I;B')$は C^r 有界となる．

いま $\tilde{\pi}_1:B\times\mathcal{BC}^0(I;B')\to\mathcal{BC}^0(I;E)$を $\tilde{\pi}_1(x,\alpha)(t)=x$, $(x,\alpha)\in B\times\mathcal{BC}^0(I;B')$, $t\in I$ で定義すると，これは連続線型写像の制限である．したがって，C^∞ 級で，特に，$\tilde{\pi}_1\in\mathcal{BC}^r(B\times\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;E))$と考えられる．

つぎに，$\pi_2:B\times\mathcal{BC}^0(I;B')\to\mathcal{BC}^0(I;B')$ を第2成分への射影とすると，これは C^∞ 級である．したがって，§1補題4から，$\pi_2{}^*:\mathcal{BC}^r(\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;B'))\to\mathcal{BC}^r(B\times\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;B'))$は連続線型写像である．

以上から，$f\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ に対して $T_f'\in\mathcal{BC}^r(B\times\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;B'))$を対応させる写像 γ は，定値写像 $\mathcal{U}_{k,l}{}^r\ni f\mapsto\tilde{\pi}_1\in\mathcal{BC}^r(B\times\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;B))$ に，つぎの写像の合成を加えたものである．

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{k,l}{}^r &\xrightarrow{\lambda}\mathcal{BC}^r(\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;B'))\\ &\xrightarrow{\pi_2{}^*}\mathcal{BC}^r(B\times\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;B'))\\ &\xrightarrow{\sigma_*}\mathcal{BC}^r(B\times\mathcal{BC}^0(I;B');\mathcal{BC}^0(I;E))\end{aligned}$$

ここで，最後の σ_* は§1命題4から連続線型写像の制限である．したがって，γ は連続である．

以上から，§2定理3が適用できて，$f\in\mathcal{U}_{k,l}{}^r$ に対して $g_f\in\mathcal{BC}^r(B;\mathcal{BC}^0(I;B'))$を対応させる写像 δ も連続となる．そして，$t\in I$ に対して $\mathrm{ev}^t(\alpha)=\alpha(t)$, $\alpha\in\mathcal{BC}^0(I;B')$によって定義される写像 $\mathrm{ev}^t:\mathcal{BC}^0(I;B')\to B'$ は連続線型写像

で，定理1の証明にあるように，$t\in I$ として

$$C_t(f)=\phi_t{}^{(f)}=\mathrm{ev}^t g_f=(\mathrm{ev}^t)_*\delta(f)$$

が成立する．そして，$(\mathrm{ev}^t)_*$ は，§1 命題4から，連続線型写像の制限である．

以上で $C_t=(\mathrm{ev}^t)_*\delta$ の連続性が証明された．▮

第7章　多様体と力学系

§1　微分可能多様体

Hausdorff 空間 M の各点が，Banach 空間の開集合と同相な開近傍をもつとき，M を**多様体**という．多様体 M の開集合 U と，U から Banach 空間 E の開集合の上への同相写像 $\alpha: U\to E$ の対 (U,α) を M の**座標近傍**という．そしてこの E を (U,α) または α に対する Banach 空間という．

r を正の整数または ∞ として固定する．

多様体 M の座標近傍の集まり $\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\alpha);\ \alpha\in A\}$ が，つぎの(1), (2)をみたすとき，これを M の **C^r 座標近傍系**という．

(1)　$\{U_\alpha;\ \alpha\in A\}$ は M の開被覆である．すなわち，$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha=M$ となる．

(2)　$\mathscr{A}$ に属する任意の座標近傍 (U_{α_1},α_1), (U_{α_2},α_2) に対して

$$\alpha_2\alpha_1^{-1}:\ \alpha_1(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2})\to\alpha_2(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2})$$

は C^r 写像である．

上の(2)で，$U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}=\phi$ のとき，(2)は成立しているものと考える．

いま，$U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}\neq\phi$ とする．すると，α_1, α_2 の立場を入れかえて考えると，$\alpha_1\alpha_2^{-1}:\alpha_2(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2})\to\alpha_1(U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2})$ も C^r 級であって，これは，明らかに $\alpha_2\alpha_1^{-1}$ の逆写像である．したがって，$\alpha_2\alpha_1^{-1}$ は C^r 微分同相写像となる．ゆえに，第6章§3命題1から，各点 $x\in U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}$ に対して，$\alpha\alpha_1^{-1}$ の点 $\alpha_1(x)$ における微係数 $D(\alpha_2\alpha_1^{-1})(\alpha_1(x)):E_{\alpha_1}\to E_{\alpha_2}$ は線型同相写像で，その逆写像は $D(\alpha_1\alpha_2^{-1})(\alpha_2(x))$ で与えられる．ここで，$E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}$ はそれぞれ α_1, α_2 に対する Banach 空間である．

以上で，点 $x \in M$ を含む $\mathscr{A}$ の任意の座標近傍(U_α, α)に対する Banach 空間 E_α は，すべて線型同相であることがわかった.

さて，E を Banach 空間とし，点 $x \in M$ を含む $\mathscr{A}$ の座標近傍(U_α, α)に対する Banach 空間 E_α が E と線型同相となるような点 $x \in M$ 全体の集合を M_E とする．すると，上に述べたことから，M_E は M の開集合である．そして，M_E の補集合 $M-M_E$ の点 y をとると，定義から，y を含む $\mathscr{A}$ の座標近傍(U_α, α)があって，これに対する Banach 空間 E_α は E と線型同相でない．したがって，$U_\alpha \subset M-M_E$ となり，$M-M_E$ は M の開集合となる．すなわち，M_E は M の閉集合でもある.

以上で，M_E は M の開かつ閉集合となる．したがって，M が連結なら，$M_E=\phi$ となるかまたは $M_E=M$ である(第2章§5命題1).

M の2つの C^r 座標近傍系 $\mathscr{A}=\{(U_\alpha, \alpha)\,;\ \alpha \in A\}$，$\mathscr{B}=\{(V_\beta, \beta)\,;\ \beta \in B\}$ がある．いま任意の $\alpha \in A$, $\beta \in B$ に対して

$$\beta\alpha^{-1}:\ \alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \beta(U_\alpha \cap V_\beta)$$

および

$$\alpha\beta^{-1}:\ \beta(U_\alpha \cap V_\beta) \to \alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$$

が C^r 級のとき，$\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$ と表わす．すると，つぎの命題が成立する.

命題 1 $\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$ という関係は，M の C^r 座標近傍系の間の同値関係である.

証明 反射律：$\mathscr{A} \sim \mathscr{A}$，および対称律：$\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$ ならば $\mathscr{B} \sim \mathscr{A}$，は定義から明らかである．したがって，推移律を証明すればよい.

$$\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \alpha)\,;\ \alpha \in A\}, \qquad \mathscr{B} = \{(V_\beta, \beta)\,;\ \beta \in B\},$$
$$\mathscr{C} = \{(W_\gamma, \gamma)\,;\ \gamma \in C\}$$

を M の C^r 座標近傍とし，$\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$，$\mathscr{B} \sim \mathscr{C}$ とする．いま $(U_\alpha, \alpha) \in \mathscr{A}$，$(W_\gamma, \gamma) \in \mathscr{C}$ に対して

$$\gamma\alpha^{-1}:\ \alpha(U_\alpha \cap W_\gamma) \to \gamma(U_\alpha \cap W_\gamma)$$

および

$$\alpha\gamma^{-1}:\ \gamma(U_\alpha \cap W_\gamma) \to \alpha(U_\alpha \cap W_\gamma)$$

が C^r 級となることをいえば，$\mathscr{A} \sim \mathscr{C}$ がわかる.

$x\in U_\alpha\cap W_\gamma$ とする．$\{V_\beta;\ \beta\in B\}$ は M の開被覆だから，適当な $\beta\in B$ をとると $x\in V_\beta$ となる．すると，仮定から，

$$\beta\alpha^{-1}:\ \alpha(U_\alpha\cap V_\beta)\to\beta(U_\alpha\cap V_\beta)$$

および

$$\gamma\beta^{-1}:\ \beta(W_\gamma\cap V_\beta)\to\gamma(W_\gamma\cap V_\beta)$$

は，C^r 級である．したがって，合成関数の微分公式から

$$\gamma\alpha^{-1}=(\gamma\beta^{-1})(\beta\alpha^{-1}):\ \alpha(U_\alpha\cap V_\beta\cap W_\gamma)\to\gamma(U_\alpha\cap V_\beta\cap W_\gamma)$$

は C^r 級である．そして，$x\in U_\alpha\cap V_\beta\cap W_\gamma$ であるから，$\gamma\alpha^{-1}$ は $\alpha(x)$ で C^r 級である．

$\gamma\alpha^{-1}:\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma)\to\gamma(U_\alpha\cap W_\gamma)$ は $\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma)$ の各点で C^r 級であるから，$\alpha(U_\alpha\cap W_\gamma)$ で C^r 級である．

$\alpha\gamma^{-1}$ についても同様である．▌

この命題から，$\mathcal{A}\sim\mathcal{B}$ は M の C^r 座標近傍系の間の同値関係であることがわかった．この同値類を M の **C^r 微分可能構造**といい，M に1つの C^r 微分可能構造をつけて考えるとき，これを **C^r 微分可能多様体**，または **C^r 多様体**という．

M を C^r 多様体とする．その C^r 微分可能構造に属する C^r 座標近傍系を，単に **C^r 多様体 M の C^r 座標近傍系**という．そして，この C^r 座標近傍系に属する座標近傍を，**C^r 多様体 M の C^r 座標近傍**という．

命題 2　M を C^r 多様体とすると，つぎの性質が成立する．

(1)　M の2つの C^r 座標近傍 (U,α), (V,β) に対し

$$\beta\alpha^{-1}:\ \alpha(U\cap V)\to\beta(U\cap V)$$

および

$$\alpha\beta^{-1}:\ \beta(U\cap V)\to\alpha(U\cap V)$$

は C^r 写像である．

(2)　$\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\alpha);\ \alpha\in A\}$ を M の C^r 座標近傍系とし，(W,γ) を M の座標近傍とする．いま，任意の $\alpha\in A$ に対して

$$\gamma\alpha^{-1}:\ \alpha(U\cap W)\to\gamma(U\cap W)$$

および

$$\alpha\gamma^{-1}: \gamma(U\cap W)\to\alpha(U\cap W)$$

が C^r 級ならば，(W,γ) は M の C^r 座標近傍である．

(3) (U,α) を M の C^r 座標近傍とし，U' を U の開集合とする．いま，$\alpha'=\alpha|U': U'\to E$ (E は α に対する Banach 空間) とすると，(U',α') も M の C^r 座標近傍である．

(4) (U,α) を M の C^r 座標近傍とし，α に対する Banach 空間を E_α とする．いま，F_α を E_α と線型同相な Banach 空間とし，$\varphi: \alpha(U)\to F_\alpha$ を $\alpha(U)$ から F_α の開集合への C^r 微分同相写像とする．すると，$(U,\varphi\alpha)$ は M の C^r 座標近傍である．

(5) M の各点 x に対して，適当な C^r 座標近傍 (U,α) をとって，$\alpha(x)=0$ (α に対する Banach 空間の原点) とできる．

証明 (1) $(U,\alpha), (V,\beta)$ を M の C^r 座標近傍とし，これらの属する M の C^r 座標近傍系を $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ とすると，$\mathscr{A}\sim\mathscr{B}$ であるから (1) は明らかである．

(2) の条件が成立するような M の座標近傍を (W,γ) とする．そして，これを $\mathscr{A}$ につけ加えたものを $\mathscr{B}$ とすると，仮定から $\mathscr{B}$ は M の C^r 座標近傍系となり，$\mathscr{A}$ と同値となる．したがって，(W,γ) は M の C^r 座標近傍である．

(3), (4) は (2) の条件が (U',α'), $(U,\varphi\alpha)$ に対して成立することからわかる．

点 x を含む M の C^r 座標近傍 (U,α) をとる．そして，$\alpha(x)\neq 0$ ならば，E_α の平行移動 $\varphi: E_\alpha\to E_\alpha$ を $\varphi(z)=z-\alpha(x)$，$z\in E_\alpha$ で定義し，$(U,\varphi\alpha)$ を考えれば，これが (5) をみたすものである．▌

M を C^r 多様体，$\mathscr{A}=\{(U_\alpha,\alpha);\ \alpha\in A\}$ をその C^r 座標近傍系とする．いま，α に対する Banach 空間 E_α が，すべて，一定の Banach 空間 E と線型同相のとき，M を **E をモデルとする C^r 多様体**，または **C^rE 多様体**という．このとき，線型同相写像 $\varphi_\alpha: E_\alpha\to E$，$\alpha\in A$ を固定して，$(U_\alpha,\varphi_\alpha\alpha)$ を考えると，これは上の命題から M の C^r 座標近傍となる．そして $\mathscr{B}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha\alpha);\ \alpha\in A\}$ を考えると，これは $\mathscr{A}$ と同値な M の C^r 座標近傍系で，その各元 $(U_\alpha,\varphi_\alpha\alpha)$ に対する Banach 空間は E となる．

E が有限次元の Banach 空間で $\dim E=n$, すなわち $E=\boldsymbol{R}^n$ のとき，C^rE 多様体 M を **n 次元 C^r 多様体**という．そして $\dim M=n$ で表わす．このとき，M の C^r 座標近傍 (U, α) を，これに対する Banach 空間が $\boldsymbol{R}^n$ となるようにとる．そしてこの座標を $(x_1, \cdots, x_n)$ とし，$\alpha(p)=(x_1(p), \cdots, x_n(p)) \in \boldsymbol{R}^n$, $p \in U$ とする．このようにして定まる U 上の n 個の実数値関数 $x_1, \cdots, x_n$ の組 $(x_1, \cdots, x_n)$ を M の **C^r 局所座標系**という．

例 1　Banach 空間 E の開集合を D とする．いま，$i: D \to E$ を包含写像とすると，(D, i) は D の座標近傍で，$\mathscr{A}=\{(D, i)\}$ は D の C^∞ 座標近傍系である．これによって D は $C^\infty E$ 多様体となる．特に，E 自身 $C^\infty E$ 多様体である．

また $\boldsymbol{R}^n$ の開集合は n 次元 C^∞ 多様体で，$\boldsymbol{R}^n$ 自身 n 次元 C^∞ 多様体である．

さらに，この一般化として，つぎの例がある．

例 2　M を C^r 多様体とし，その C^r 座標近傍系を $\mathscr{A}=\{(U_\alpha, \alpha)\,;\ \alpha \in A\}$ とする．いま D を M の開集合とし，$\mathscr{A}|D=\{(U_\alpha \cap D, \alpha|U_\alpha \cap D)\,;\ \alpha \in A\}$ とおくと，これは D の C^r 座標近傍系となる．このようにして定まる D の C^r 微分可能構造で，D を C^r 多様体と考えるとき，D を M の**開部分多様体**という．

例 3　M, N を C^r 多様体とする．いま，$\mathscr{A}=\{(U_\alpha, \alpha)\,;\ \alpha \in A\}$ および $\mathscr{B}=\{(V_\beta, \beta)\,;\ \beta \in B\}$ をそれぞれ M および N の C^r 座標近傍系とする．このとき，$\mathscr{A} \times \mathscr{B}=\{(U_\alpha \times V_\beta, \alpha \times \beta)\,;\ (\alpha, \beta) \in A \times B\}$ とおくと，これは $M \times N$ の C^r 座標近傍系となる．このようにして定まる C^r 多様体 $M \times N$ を M と N の**積多様体**という．

M, N がそれぞれ Banach 空間 E, F をモデルとするとき，$M \times N$ は $E \times F$ をモデルとする多様体である．特に $\dim M=m$, $\dim N=n$ ならば $\dim M \times N=m+n$ となる．

M, N を C^r 多様体とし，写像 $f: M \to N$ が与えられているものとする．いま，M の各点 x に対して，x を含む M の C^r 座標近傍 (U, α) および $f(x)$ を含む N の C^r 座標近傍 (V, β) があって，つぎの2つの条件をみたすとき，f を **C^r 写像**，または **C^r 級**という．

(1)　$f(U) \subset V$

(2)　$\beta f\alpha^{-1}: \alpha(U)\to\beta(V)$ は C^r 級である.

命題 3　$f: M\to N$ が C^r 写像なら, f は連続で, $f(U_1)\subset V_1$ をみたす M, N の任意の C^r 座標近傍 (U_1, α_1), (V_1, β_1) に対して, $\beta_1 f\alpha_1^{-1}: \alpha_1(U_1)\to\beta_1(V_1)$ は C^r 級である.

証明　f が連続となることは明らかである. いま, $x\in U_1$ とし, (U, α), (V, β) を上の条件(1), (2)をみたす M, N の C^r 座標近傍とする. 命題2から $\alpha\alpha_1^{-1}: \alpha_1(U\cap U_1)\to\alpha(U\cap U_1)$, および $\beta_1\beta^{-1}: \beta(V\cap V_1)\to\beta_1(V\cap V_1)$ は C^r 級である. したがって, (2)から, つぎの合成写像

$$\beta_1 f\alpha_1^{-1}=(\beta_1\beta^{-1})(\beta f\alpha^{-1})(\alpha\alpha_1^{-1}):\ \alpha_1(U\cap U_1)\to\beta_1(V\cap V_1)$$

は C^r 級である. そして, $x\in U\cap U_1$ で, $\alpha_1(U\cap U_1)$ は $\alpha_1(U_1)$ の開集合だから, $\beta_1 f\alpha_1^{-1}: \alpha_1(U_1)\to\beta_1(V_1)$ は点 $\alpha_1(x)\in\alpha_1(U_1)$ で C^r 級となる. ▌

系　$f: M\to N$ を C^r 写像, x を M の点とする. いま, $f(x)$ を含む N の任意の C^r 座標近傍を (V, β) とする. すると, x を含む M の適当な C^r 座標近傍 (U, α) があって, $f(U)\subset V$ をみたし, $\beta f\alpha^{-1}: \alpha(U)\to\beta(V)$ は C^r 級となる.

証明　f が連続となるから, $f^{-1}(V)$ は x を含む開集合となる(第2章§3定理1). いま, x を含む M の C^r 座標近傍を $(\tilde{U}, \tilde{\alpha})$ とする. そして, $U=\tilde{U}\cap f^{-1}(V)$, $\alpha=\tilde{\alpha}|\tilde{U}\cap f^{-1}(V)$ とおくと, U は開集合で $f(U)\subset V$ となる. そして, 命題2から, (U, α) は x を含む M の C^r 座標近傍となる. そして, $\beta f\alpha^{-1}$ が C^r 級となることは命題3からわかる. ▌

つぎの命題は定義からすぐわかる.

命題 4　(1)　C^r 多様体 M の恒等写像 $1: M\to M$ は C^r 級である.

(2)　M_1, M_2, M_3 を C^r 多様体とし, $f: M_1\to M_2$, $g: M_2\to M_3$ を C^r 写像とすると, この合成写像 $gf: M_1\to M_3$ は C^r 写像である.

M, N を C^r 多様体とする. 写像 $f: M\to N$ が全単射で, f およびその逆写像 f^{-1} がともに C^r 級のとき, f を C^r **微分同相写像**という. 命題3から, C^r 微分同相写像は同相写像である.

C^r 多様体 M, N の間に C^r 微分同相写像 $f: M\to N$ が存在するとき, M と N は C^r **微分同相**といい, $M\approx N$ で表わす.

つぎの命題は，定義と命題4からすぐわかる．

命題 5　(1)　C^r 多様体 M の恒等写像 $1:M\to M$ は C^r 微分同相写像である．

(2)　$f:M\to N$ を C^r 多様体の間の C^r 微分同相写像とすると，その逆写像 $f^{-1}:N\to M$ も C^r 微分同相写像である．

(3)　M_1, M_2, M_3 を C^r 多様体，$f:M_1\to M_2$，$g:M_2\to M_3$ を C^r 微分同相写像とすると，その合成写像 $gf:M_1\to M_3$ も C^r 微分同相写像となる．

系　C^r 多様体の間の C^r 微分同相という関係は同値関係である．

これから，C^r 多様体の接ベクトル空間や C^r 写像の微分を定義しよう．

M を C^r 多様体とし，$x\in M$ とする．x を含む M の C^r 座標近傍(U_α,α)をとり，これに対する Banach 空間を E_α とする．そして，$v\in E_\alpha$ として，組(U_α,α,v)を考える．このようなもの全体の集合を $\mathcal{E}_x$ とする．

いま $\mathcal{E}_x$ の2つの元(U_α,α,v), (U_β,β,w)をとると，$x\in U_\alpha\cap U_\beta$ となる．いま，$\beta\alpha^{-1}:\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$の点 $\alpha(x)$における微係数 $D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))$: $E_\alpha\to E_\beta$ が v を w に写すとき，すなわち $D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))(v)=w$ のとき，$(U_\alpha,\alpha,v)\sim(U_\beta,\beta,w)$と定義する．

補題　$\mathcal{E}_x$ におけるこの関係 $\sim$ は同値関係である．

証明　反射律：$(U_\alpha,\alpha,v)\sim(U_\alpha,\alpha,v)$，は明らかである．

いま，$(U_\alpha,\alpha,v)\sim(U_\beta,\beta,w)$とする．すると $D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))(v)=w$ となる．すると，この§の初めに示したように，$D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))$は線型同相写像で，$\{D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))\}^{-1}=D(\alpha\beta^{-1})(\beta(x))$となる．したがって，$D(\alpha\beta^{-1})(\beta(x))(w)=v$ となり，これから$(U_\beta,\beta,w)\sim(U_\alpha,\alpha,v)$がわかる．

つぎに，$(U_\alpha,\alpha,v)\sim(U_\beta,\beta,w)$，$(U_\beta,\beta,w)\sim(U_\gamma,\gamma,u)$とする．すると，$D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))(v)=w$，$D(\gamma\beta^{-1})(\beta(x))(w)=u$ が成立する．したがって，鎖法則から

$$\begin{aligned}D(\gamma\alpha^{-1})(\alpha(x))(v) &= D(\gamma\beta^{-1})(\beta(x))(D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))(v))\\ &= D(\alpha\beta^{-1})(\beta(x))(w)=u\end{aligned}$$

となる．ゆえに$(U_\alpha,\alpha,v)\sim(U_\gamma,\gamma,u)$となる．▌

さて，この $\mathcal{E}_x$ を同値関係 ~ で分類してできる同値類全体の集合を $T_x(M)$ で表わす．すなわち，$T_x(M)=\mathcal{E}_x/\sim$ であって，これは $\mathcal{E}_x$ の同値関係 ~ による商集合である．

いま，点 $x\in M$ を含む M の C^r 座標近傍(U_α,α)を固定しよう．そして，これに対する Banach 空間を E_α とする．E_α の元 v に対して(U_α,α,v)の属する同値類 $[(U_\alpha,\alpha,v)]\in T_x(M)$を対応させる写像を $\varphi_x{}^{(\alpha)}:E_\alpha\to T_x(M)$とする．すると，これは明らかに単射である．また任意の$(U_\beta,\beta,w)\in\mathcal{E}_x$ に対して，$v=D(\alpha\beta^{-1})(\beta(x))(w)$とおくと，$(U_\alpha,\alpha,v)\sim(U_\beta,\beta,w)$となることから，$\varphi_x{}^{(\alpha)}$ は全射である．

以上で $\varphi_x{}^{(\alpha)}:E_\alpha\to T_x(M)$が全単射であることがわかったが，これを用いて $T_x(M)$と E_α を同一視すれば，$T_x(M)$に位相ベクトル空間の構造，さらには，Banach 空間の構造が入る．そして $\varphi_x{}^{(\alpha)}$ は線型同相写像となる．

いま，点 $x\in M$ を含む M の 2 つの C^r 座標近傍(U_α,α), (U_β,β)をとると，定義から $\{\varphi_x{}^{(\beta)}\}^{-1}\varphi_x{}^{(\alpha)}:E_\alpha\to E_\beta$ は，$\{\varphi_x{}^{(\beta)}\}^{-1}\varphi_x{}^{(\alpha)}=D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(x))$ をみたす．したがって，線型同相写像である．このことから，$T_x(M)$の位相ベクトル空間としての構造は，C^r 座標近傍のとり方に無関係に定まることがわかる．そして，$\varphi_x{}^{(\alpha)}$ および $\varphi_x{}^{(\beta)}$ を用いて入れた $T_x(M)$の Banach 空間の構造，すなわち，ノルムは，互いに同値となる．

このようにして定まる位相ベクトル空間 $T_x(M)$を**点 x における M の接ベクトル空間**という．

M が Banach 空間 E の開集合のとき，包含写像 $i:M\to E$ によって $\varphi_x{}^{(i)}:E\to T_x(M)$を作り，これによって，$E$ と $T_x(M)$を同一視する．これを**自然な同一視**という．

M, N を C^r 多様体，$f:M\to N$ を C^r 写像とする．点 $x\in M$ に対して，x を含む M の C^r 座標近傍(U,α)および $f(x)$を含む N の C^r 座標近傍(V,β)を適当にとって，$f(U)\subset V$ とする．命題 3 から，$\beta f\alpha^{-1}:\alpha(U)\to\beta(V)$は C^r 級となる．そこで，つぎの図を考えよう．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_x{}^{(\alpha)}} & T_x(M) \\ {\scriptstyle D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_x f} \\ F & \xrightarrow{\varphi_{f(x)}{}^{(\beta)}} & T_{f(x)}(N) \end{array}$$

いま,

$T_x f\colon T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$　を　$T_x f = \varphi_{f(x)}{}^{(\beta)} D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))\{\varphi_x{}^{(\alpha)}\}^{-1}$
と定義する．すると，$\bar{v}=[(U,\alpha,v)] \in T_x(M)$に対して，

$$T_x f(\bar{v}) = [(V,\beta,D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))(v))]$$

となる．

この写像 $T_x f$ が，$(U,\alpha),(V,\beta)$のとり方に無関係に定まることは，つぎのようにしてわかる．

いま，$(U_1,\alpha_1),(V_1,\beta_1)$をそれぞれ x および $f(x)$ を含む M,N の C^r 座標近傍で，$f(U_1)\subset V_1$ をみたすものとする．そして，$(U,\alpha,v)\sim(U_1,\alpha_1,v_1)$とすると，$D(\alpha_1\alpha^{-1})(\alpha(x))(v)=v_1$ となる．したがって，鎖法則から

$$\begin{aligned} &D(\beta_1\beta^{-1})(\beta(f(x)))(D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))(v)) \\ &= D(\beta_1 f\alpha^{-1})(\alpha(x))(v) \\ &= D(\beta_1 f\alpha_1{}^{-1})(\alpha_1(x))(D(\alpha_1\alpha^{-1})(\alpha(x))(v)) \\ &= D(\beta_1 f\alpha_1{}^{-1})(\alpha_1(x))(v_1) \end{aligned}$$

となる．すなわち

$$(V,\beta,D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))(v)) \sim (V_1,\beta_1,D(\beta_1 f\alpha_1{}^{-1})(\alpha_1(x))(v_1))$$

となる．

このように，$T_x f: T_x(M)\to T_{f(x)}(N)$ が C^r 座標近傍$(U,\alpha),(V,\beta)$のとり方に無関係であることがわかった．これを**写像 f の点 x における微分**という．これは，定義から連続線型写像である．

M,N を Banach 空間 E,F の開集合，$f:M\to N$ を C^r 写像とする．いま，$T_x(M)=E$，$T_{f(x)}(N)=F$，$x\in M$ と自然な同一視を行なうと，f の x における微分 $T_x f$ は，f の点 x における微係数 $Df(x):E\to F$ と同一視することができる．

命題 6 (1) C^r 多様体 M の恒等写像 $1:M\to M$ の点 $x\in M$ における微分 $T_x1:T_x(M)\to T_x(M)$ は，$T_x(M)$ の恒等写像である．すなわち，$T_x1=1$ である．

(2) M_1,M_2,M_3 を C^r 多様体，$f:M_1\to M_2$，$g:M_2\to M_3$ を C^r 写像とすると，$T_x(gf)=T_{f(x)}gT_xf$，$x\in M_1$ となる．

(3) M,N を C^r 多様体，$f:M\to N$ を C^r 微分同相写像とする．すると，$T_xf:T_x(M)\to T_{f(x)}(N)$，$x\in M$ は線型同相写像で，$(T_xf)^{-1}=T_{f(x)}f^{-1}$ となる．

証明 (1)は定義からすぐわかる．(2)は鎖法則を用いて，T_xf の定義式から簡単に計算できる．

最後に(3)は，(1), (2)からつぎのようにわかる．すなわち，

$$(T_{f(x)}f^{-1})(T_xf)=T_x(f^{-1}f)=T_x(1)=1$$

同様に，$(T_xf)(T_{f(x)}f^{-1})=1$. ▌

命題 7 (1) M,N を C^r 多様体とし，$(x,y)\in M\times N$ とする．すると，$T_{(x,y)}(M\times N)$ は $T_x(M)\times T_y(N)$ と自然に同一視できる．

(2) M_1,M_2,N_1,N_2 を C^r 多様体，$f:M_1\to N_1$，$g:M_2\to N_2$ を C^r 写像とする．このとき，$f\times g:M_1\times M_2\to N_1\times N_2$ は C^r 写像であって，点 $(x,y)\in M_1\times M_2$ における $f\times g$ の微分

$$T_{(x,y)}(f\times g):T_{(x,y)}(M_1\times M_2)\to T_{(f(x),g(y))}(N_1\times N_2)$$

は上の同一視によって

$$T_xf\times T_yg:T_x(M_1)\times T_y(M_2)\to T_{f(x)}(N_1)\times T_{g(y)}(N_2)$$

に対応する．

証明 (1) 点 x を含む M の C^r 座標近傍を (U,α)，点 y を含む N の C^r 座標近傍を (V,β) とする．そして，α,β に対する Banach 空間を E,F とする．すると，定義から，$(U\times V,\alpha\times\beta)$ は点 (x,y) を含む $M\times N$ の C^r 座標近傍である．そこで，つぎの合成写像

$$T_{(x,y)}(M\times N)\xrightarrow{\{\varphi_{(x,y)}{}^{(\alpha\times\beta)}\}}E\times F\xrightarrow{\varphi_x{}^{(\alpha)}\times\varphi_y{}^{(\beta)}}T_x(M)\times T_y(N)$$

によって，$T_{(x,y)}(M\times N)$ と $T_x(M)\times T_y(N)$ を同一視することにする．この

同一視は，$(U, \alpha), (V, \beta)$のとり方に無関係であることが証明できる．

(2)の証明は，定義から簡単にできる．▌

§2 部分多様体

M を C^r 多様体$(1 \leqq r \leqq \infty)$，N をその部分集合とする．N の各点 x に対し，x を含む M の C^r 座標近傍(U, α)とこれに対する Banach 空間 E の位相直和分解 $E=E_1 \oplus E_2$(これを $E_1 \times E_2$ と同一視する)を適当にとって，つぎの条件が成立するものとする．

(1) E_1, E_2 の適当な開集合 U_1, U_2 があって，α は U から $U_1 \times U_2$ の上への同相写像である．

(2) 適当な点 $a_2 \in U_2$ があって，$\alpha(U \cap N) = U_1 \times \{a_2\}$ となる．

以上の条件がみたされているとき，N に自然な C^r 微分可能構造が入り，N は C^r 多様体となる．これを M の**部分多様体**という．そこで，この C^r 微分可能構造を定義しよう．

いま $\pi_1 : U_1 \times U_2 \to U_1$ を第1成分への射影とし，$\alpha_N = \pi_1(\alpha | U \cap N) : U \cap N \to U_1$ とおく．すなわち，$\alpha(y) = (\alpha_N(y), a_2)$，$y \in U \cap N$ をみたすものとする．すると，N を相対位相で考えたとき，α_N は N の開集合 $U \cap N$ から E_1 の開集合 U_1 への同相写像である．すなわち，$(U \cap N, \alpha_N)$は N の座標近傍である．そこで，このような N の座標近傍$(U \cap N, \alpha_N)$の全体の集まりを $\mathscr{A}_N$ とするとき，これが N の C^r 座標近傍系となることを証明しよう．

まず，定義からこのような $U \cap N$ 全体の集合は N の開被覆となる．したがって，$\mathscr{A}_N$ に属する2つの座標近傍$(U \cap N, \alpha_N), (V \cap N, \beta_N)$に対して

$$\beta_N \alpha_N^{-1} : \alpha_N(U \cap V \cap N) \to \beta_N(U \cap V \cap N)$$

が C^r 級となることをいえば十分である．

いま，α, β に対する Banach 空間を E, F とし，(1), (2)をみたすようなその位相直和分解を $E = E_1 \times E_2$，$F = F_1 \times F_2$ とする．すると，適当な E_i, F_i の

開集合 $U_i, V_i, (i=1,2)$，および点 $a_2\in U_2$，$b_2\in V_2$ があって

$$\alpha(U)=U_1\times U_2,\qquad \alpha(U\cap N)=U_1\times\{a_2\},$$
$$\beta(V)=V_1\times V_2,\qquad \beta(V\cap N)=V_1\times\{b_2\}$$

となる．仮定から，$\beta\alpha^{-1}:\alpha(U\cap V)\to\beta(U\cap V)$ は C^r 級である．そして，$\pi_1{}':V_1\times V_2\to V_1$ を第1成分への射影，$i_1:U_1\to U_1\times U_2$ を $i_1(y)=(y,a_2)$，$y\in U_1$ で定義される包含写像とすると，これらは C^∞ 級となる．そして，$\beta_N\alpha_N{}^{-1}=\pi_1{}'\beta\alpha^{-1}i_1$ となるから，$\beta_N\alpha_N{}^{-1}$ は C^r 級である．

以上で $\mathcal{A}_N$ が N の C^r 座標近傍系であることがわかった．これが N の自然な C^r 微分可能構造を定める．

N を C^r 多様体 M の部分多様体とし，$i:N\to M$ を包含写像とすると，i は C^r 写像である．

C^r 多様体 M の開集合，すなわち M の開部分多様体は，上の意味で M の部分多様体である．

また，C^r 多様体 M の部分多様体 N が，M の閉集合となるとき，これを閉部分多様体という．

例 1 M, N を C^r 多様体とし，$M\times N$ をその積多様体とする．いま，点 $b\in N$ を固定し，$M\times\{b\}\subset M\times N$ を考える．すると，§1例3の定義から，これは $M\times N$ の閉部分多様体となる．また，$\{a\}\times N$，$a\in M$ についても同様である．

例 2 $f:M\to N$ を C^r 写像とし，f のグラフ $\mathrm{graph}(f)=\{(x,f(x));\ x\in M\}$ を考える．すると，これが $M\times N$ の閉部分多様体であることを証明しよう．

$(x,y)\notin\mathrm{graph}(f)$ とする．すると，$y\neq f(x)$ である．N は Hausdorff 空間だから，y および $f(x)$ の適当な近傍 V_2, W_2 をとると $V_2\cap W_2=\phi$ とできる．f は連続だから，$f^{-1}(W_2)$ は x の近傍である．すると，$f^{-1}(W_2)\times V_2$ は (x,y) の近傍であって，$f^{-1}(W_2)\times V_2\cap\mathrm{graph}(f)=\phi$ となる．すなわち，$(x,y)\notin\overline{\mathrm{graph}(f)}$ となる．すなわち，$\overline{\mathrm{graph}(f)}\subset\mathrm{graph}(f)$ となる．したがって，第2章§2定理2から，$\mathrm{graph}(f)$ は閉集合である．

いま$(x_0, f(x_0)) \in \mathrm{graph}(f)$，$x_0 \in M$ を固定する．f は C^r 級だから，x_0 および $f(x_0)$ を含む M および N の C^r 座標近傍(U, α), (V, β)を適当にとると，$f(U) \subset V$ で

$$g = \beta f \alpha^{-1}:\ \alpha(U) \to \beta(V)$$

は C^r 級となる．すると，$(U\times V, \alpha\times\beta)$は点$(x_0, f(x_0))$をふくむ$M\times N$の C^r 座標近傍で，$\alpha(x_0)=a$，$\beta(f(x_0))=b$ とすると，$(\alpha\times\beta)(x_0, f(x_0))=(a, b)$，$g(a)=b$ であって，

$$(\alpha\times\beta)(U\times V\cap N) = \{(x, g(x))\ ;\ x \in \alpha(U)\}$$

となる．

いま，α, β に対する Banach 空間を E, F とする．そして，$(y, z) \in \alpha(U)\times\beta(V)=(\alpha\times\beta)(U\times V)$ にたいして $(y, z-g(y)) \in E\times F$ を対応させる写像を $G:\alpha(U)\times\beta(V)\to E_1\times E_2$ とすると，$G(a, b)=(a, 0)$となる．また，第5章§1命題5，第5章§2定理1から，G の点(a, b)における微係数 $DG(a, b)$: $E_1\times E_2\to E_1\times E_2$ は

$$DG(a, b)(u, v) = (u, v-Dg(a)(u)), \qquad (u, v) \in E_1\times E_2$$

と表わせる．そして，この式から $DG(a, b)$が線型同相写像であることがわかる．

したがって，G に逆関数の定理が適用できて，G は点(a, b)の近傍 $\tilde{U}$ から点$(a, 0)$の近傍 $\tilde{V}$ への C^r 微分同相写像である．いま，これらを十分小さくとって，$\tilde{V}$ が E, F の開集合 $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ の直積 $\tilde{V}_1\times\tilde{V}_2$ と等しくなるようにする．そして，$\tilde{W}=(\alpha\times\beta)^{-1}(\tilde{U})$，$\tilde{\alpha}=G(\alpha\times\beta|\tilde{W})$とおくと$(\tilde{W}, \tilde{\alpha})$は点$(x_0, f(x_0))$をふくむ M の C^r 座標近傍で，$\tilde{\alpha}(\tilde{W}\cap N)=\tilde{V}_1\times\{0\}$，$\tilde{\alpha}(\tilde{W})=\tilde{V}_1\times\tilde{V}_2$ となる．

以上で C^r 写像 $f:M\to N$ のグラフ graph(f)が $M\times N$の部分多様体であることがわかった．

命題 1　M を C^r 多様体，N をその部分多様体とする．いま，X を C^r 多様体とし，写像 $f:X\to M$ の像 $f(X)$は N に含まれているものとする．このとき，f は自然に写像 $\dot{f}:X\to N$ をひき起こす．そして，$\dot{f}$ が C^r 級となるための

必要十分条件は，f が C^r 級となることである．

証明　$i:N\to M$ を包含写像とすると，$f=i\bar{f}$ となる．i は C^r 級だから，$\bar{f}$ が C^r 級なら f も C^r 級である．

逆に，f を C^r 級とする．点 $x\in X$ に対して，$f(x)\in N$ の C^r 座標近傍 (U,α) を初めの(1), (2)をみたすようにとる．f は連続だから，点 x の近傍 W を $f(W)\subset U$ となるようにとれる．そして，必要なら，さらに W を小さくとって，(W,γ) が X の C^r 座標近傍となるようにする(§1 命題2)．すると，§1 命題3から $\alpha f\gamma^{-1}:\gamma(W)\to\alpha(U)$ は C^r 級である．

一方，仮定から $f(W)\subset N$，したがって，$f(W)\subset U\cap N$ となる．そして，$\alpha_N\bar{f}\gamma^{-1}=\pi_1\alpha f\gamma^{-1}:\gamma(W)\to U_1$ となる．ここで，$\pi_1:\alpha(U)=U_1\times U_2\to U_1$ は第1成分への射影で，C^∞ 級である．したがって $\alpha_N\bar{f}\gamma^{-1}$ は C^r 級となる．▌

命題 2　M を C^r 多様体，N をその部分多様体とする．$i:N\to M$ を包含写像とし，その点 $x\in N$ における微分を $T_xi:T_x(N)\to T_x(M)$ とすると，これは単射で，その像は $T_x(M)$ の位相直和因子である．

証明　(U,α) をこの § の初めの条件(1), (2)をみたし，点 $x\in N$ を含む M の C^r 座標近傍とすると，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc}
E_1 & \xrightarrow{\varphi_x^{(\alpha_N)}} & T_x(N) \\
{\scriptstyle D(\alpha i\alpha_N^{-1})(\alpha_N(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_xi} \\
E=E_1\times E_2 & \xrightarrow{\varphi_x^{(\alpha)}} & T_x(M)
\end{array}$$

すなわち，$\varphi_x^{(\alpha)}D(\alpha i\alpha_N^{-1})(\alpha_N(x))=T_xi\varphi_x^{(\alpha_N)}$ である．そして，定義から $\varphi_x^{(\alpha)}$，$\varphi_x^{(\alpha_N)}$ は線型同相写像である．さらに，$\alpha i\alpha_N^{-1}:U_1\to U_1\times U_2$ は $(\alpha i\alpha_N^{-1})(y)=(y,a_2)$，$y\in U_1$，$a_2\in U_2$ で与えられるから，$\alpha i\alpha_N^{-1}$ の点 $\alpha_N(x)$ における微係数 $D(\alpha i\alpha_N^{-1})(\alpha_N(x)):E_1\to E_1\times E_2$ は $D(\alpha i\alpha_N^{-1})(\alpha_N(x))(u)=(u,0)$，$u\in E_1$ で与えられる．このことから，命題2は明らかである．▌

命題2を用いて，$T_x(N)$ と $\mathrm{Im}\,T_xi=T_xi(T_x(N))\subset T_x(M)$ を同一視することがある．

M,N を C^r 多様体とする．いま，C^r 写像 $f:M\to N$ の点 $x\in M$ における微

分 $T_xf: T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$ が単射で，その像が $T_{f(x)}(N)$ の位相直和因子となるとき，f は**点 x で C^r 級のはめこみ**であるという．そして，M の各点で C^r 級のはめこみのとき，f は **C^r 級のはめこみ**という．

$f: M \to N$ が C^r 級のはめこみであって，さらに，その像 $f(M)$ が N の部分多様体となるとき，f を **C^r 級のうめこみ**という．

C^r 多様体の部分多様体の包含写像は C^r 級のうめこみである(命題2)．

C^r 写像 $f: M \to N$ の点 $x \in M$ における微分 $T_xf: T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$ が全射で，その核 Ker T_xf が $T_x(M)$ の位相直和因子となるとき，f は**点 x で C^r 級のしずめこみ**であるという．また，M の各点で f が C^r 級のしずめこみのとき，f は **C^r 級のしずめこみ**という．

M, N が有限次元多様体のとき，第4章§2定理3系2から，上の条件のうち，位相直和因子という条件は常にみたされていることがわかる．したがって，この条件は不要で，たとえば，C^r 写像 $f: M \to N$ が点 $x \in M$ で C^r 級はめこみとなるための必要十分条件は，T_xf が単射となることである．

逆関数の定理の系1の応用として，つぎの命題を得る．

命題 3 M, N を C^r 多様体，$f: M \to N$ を C^r 写像とする．いま f が点 $x \in M$ で C^r 級はめこみなら，点 x を含む M の適当な C^r 座標近傍 (U, α)，$f(x)$ を含む N の適当な C^r 座標近傍 (V, β)，および β に対する Banach 空間 F の適当な位相直和分解 $F = F_1 \oplus F_2 = F_1 \times F_2$ があって，つぎの4つの性質をみたす．

(1) $f(U) \subset V$

(2) F_1, F_2 の適当な開集合 V_1, V_2 があって，$\beta(V) = V_1 \times V_2$，$\beta f(U) = V_1 \times \{b_2\}$，$b_2 \in V$ となる．

(3) $\beta f \alpha^{-1}: \alpha(U) \to V_1 \times \{b_2\} \subset V_1 \times V_2$ は $\alpha(U)$ から $V_1 \times \{b_2\}$ への C^r 微分同相写像である．

(4) つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_x{}^{(\alpha)}} & T_x(M) \\ {\scriptstyle D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_xf} \\ F=F_1\times F_2 & \xrightarrow{\varphi_{f(x)}{}^{(\beta)}} & T_{f(x)}(N) \end{array}$$

すなわち，$\varphi_{f(x)}{}^{(\beta)}D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))=T_xf\varphi_x{}^{(\alpha)}$ である．ここで，E は α に対する Banach 空間，$\varphi_x{}^{(\alpha)}, \varphi_{f(x)}{}^{(\beta)}$ は §1 の線型同相写像である．そして，$\beta f\alpha^{-1}$ の点 $\alpha(x)$ における微係数 $D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))$ は E から $F_1=F_1\times\{0\}$ の上への線型同相写像である．すなわち，F_1 は $\mathrm{Im}\, T_xf$ に対応する空間である．

証明　$f:M\to N$ を C^r 写像とする．定義から，点 x を含む M の適当な C^r 座標近傍 (U,α) と，点 $f(x)$ を含む N の適当な C^r 座標近傍 (W,γ) があって，$f(U)\subset W$ かつ $\gamma f\alpha^{-1}:\alpha(U)\to\gamma(W)$ は C^r 級となる．また，適当に平行移動して $\alpha(x)=0$，$\gamma(f(x))=0$ と仮定しても一般性を失わない(§1 命題 2)．すると $\gamma f\alpha^{-1}(0)=0$ となる．

定義から，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_x{}^{(\alpha)}} & T_x(M) \\ {\scriptstyle D(\gamma f\alpha^{-1})(0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_xf} \\ F & \xrightarrow{\varphi_{f(x)}{}^{(\gamma)}} & T_{f(x)}(N) \end{array}$$

ここで，$\varphi_x{}^{(\alpha)}, \varphi_{f(x)}{}^{(\gamma)}$ は線型同相写像である．そして，仮定から，T_xf は単射で，その像 $\mathrm{Im}\, T_xf$ は $T_{f(x)}(N)$ の位相直和因子だから，$\mathrm{Im}\, T_xf$ に対応する F の部分ベクトル空間を F_1 とすると，F_1 は F の位相直和因子で，F_2 をその位相補空間とすると $F=F_1\oplus F_2=F_1\times F_2$ (位相直和)となる．そして，$D(\gamma f\alpha^{-1})(0)$ は E から F_1 の上への線型同相写像となる．したがって，第 6 章 §3 の逆関数定理系 1 を $\gamma f\alpha^{-1}$ に適用すると，$F=F_1\times F_2$ の原点の適当な近傍 $\tilde{U}, \tilde{V}$ と，C^r 微分同相写像 $g:\tilde{U}\to\tilde{V}$ があって

$$g(\gamma f\alpha^{-1}):\alpha(U)\cap(\gamma f\alpha^{-1})^{-1}(\tilde{U})\to\tilde{V}\subset F=F_1\times F_2$$

の像は，$F_1=F_1\times\{0\}$ に含まれ，さらに，これは E の原点の近傍から F_1 の原点の近傍への C^r 微分同相写像となる．

そこで $\beta=g\gamma$，$V=W\cap\gamma^{-1}(\tilde{U})$ とおくと，§1 命題 2 から，(V,β) は点 $f(x)$

を含む N の C^r 座標近傍である．そして，必要なら V をさらに小さくとって $\beta(V)=V_1\times V_2$(V_1, V_2 は F_1, F_2 の開集合)の形にとれば，命題の各条件が成立する．∎

つぎに，逆関数の定理系2の応用として，命題3と同様に，つぎの命題が成立する．証明は省略する．

命題 4　M, N を C^r 多様体，$f: M\to N$ を C^r 写像とする．いま，f が点 $x\in M$ で C^r 級しずめこみとすると，x を含む M の適当な C^r 座標近傍 (U, α), $f(x)$ を含む N の適当な C^r 座標近傍 (V, β)，および α に対する Banach 空間 E の適当な位相直和分解 $E=E_1\oplus E_2=E_1\times E_2$ があって，つぎの4つの性質が成り立つ．

(1)　$f(U)\subset V$

(2)　E_1, E_2 の適当な開集合 U_1, U_2 があって，$\alpha(U)=U_1\times U_2$ で $\beta f\alpha^{-1}: U_1\times U_2\to F$ は第2成分に無関係な写像である．ここで，F は β に対する Banach 空間で $\beta(V)\subset F$ となる．

(3)　U_2 の任意の点 b_2 に対して

$$\beta f\alpha^{-1}|U_1\times\{b_2\}:\ U_1\times\{b_2\}\to\beta(V)$$

は C^r 微分同相写像である．

(4)　つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} E=E_1\times E_2 & \xrightarrow{\varphi_x^{(\alpha)}} & T_x(M) \\ {\scriptstyle D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_xf} \\ F & \xrightarrow{\varphi_{f(x)}^{(\beta)}} & T_{f(x)}(N) \end{array}$$

すなわち，$\varphi_{f(x)}^{(\beta)}D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))=T_xf\varphi_x^{(\alpha)}$ である．ここで $\varphi_x^{(\alpha)}, \varphi_{f(x)}^{(\beta)}$ は線型同相写像であって，$\beta f\alpha^{-1}$ の点 $\alpha(x)$ における微係数 $D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))$ の核は E_2 で，$D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))$ は E_1 から F への線型同相写像である．すなわち，E_2 は Ker T_xf に対応する空間である．

系　M, N を C^r 多様体，$f: M\to N$ を C^r 写像とする．いま，点 $y_0\in f(M)$ に対して，f が $f^{-1}(y_0)$ の各点で C^r 級しずめこみとすると，$f^{-1}(y_0)$ は M の部

分多様体となる.

特に, f が C^r 級しずめこみなら, $f(M)$ の各点 y に対して $f^{-1}(y)$ は M の部分多様体である.

証明 前半だけ示せば十分である.

いま, $y_0 \in f(M)$, $x \in f^{-1}(y_0)$ とし, f は点 x で C^r 級しずめこみとする. すると, 命題4から(同じ記号を用いて), $\alpha(x) \in U_1 \times U_2$ の第1成分を b_1 とすると, (2), (3)の条件から, $\alpha(U \cap f^{-1}(y_0)) = \{b_1\} \times U_2$ となる. したがって, E_1 と E_2 の役目を入れかえて考えれば, $f^{-1}(y_0)$ が M の部分多様体という条件が成立する. ▮

X, M を C^r 多様体, $f: X \to M$ を C^r 写像とする. いま, N を M の部分多様体とする. すると, N の各点 y に対して, その接ベクトル空間 $T_y(N)$ は, 命題2から, y における M の接ベクトル空間 $T_y(M)$ の閉部分ベクトル空間(実は位相直和因子)である. したがって, 射影 $p_y: T_y(M) \to T_y(M)/T_y(N)$ は連続線型写像である.

いま, 点 $x \in X$ に対して, (1) $f(x) \notin N$ であるか, (2) または $f(x) \in N$ のときは, $y = f(x)$ として $p_y T_x f: T_x(X) \to T_y(M)/T_y(N)$ が全射で, その核 $\mathrm{Ker}\, p T_x f$ が $T_x(X)$ の位相直和因子となるとき, f は**点** $x \in X$ **で** N **に横断的**という. そして, これを $f \pitchfork_x N$ で表わす. また, f が X の各点で N に横断的のとき, f は N **に横断的**といい, $f \pitchfork N$ と表わす.

$p_y T_x f: T_x(X) \to T_y(M)/T_y(N)$ が全射という条件は,

$$T_y(M) = \mathrm{Im}\, T_x f + T_y(N)$$

と同値であることはすぐわかる. また, $\mathrm{Ker}\, p_y T_x f = (T_x f)^{-1}(T_y(N))$ であるから, $\mathrm{Ker}\, p_y T_x f$ が $T_x(X)$ の位相直和因子という条件は, $(T_x f)^{-1}(T_y(N))$ が $T_x(X)$ の位相直和因子という条件と等しい.

最後に, X が有限次元なら, $T_x(X)$ の任意の部分ベクトル空間は位相直和因子であるから, $f: X \to M$ が点 $x \in X$ で N に横断的となるための必要十分条件は, $f(x) \notin N$ か, または $f(x) \in N$ なら $p_y T_x f$ が全射となることである.

定理 1 X, M を C^r 多様体, N を M の部分多様体とする. いま, $f: X \to$

M が C^r 写像で $f(x) \in N$, $x \in X$ とする．このとき，f が点 $x \in X$ で N に横断的となるための必要十分条件は，適当な $x, y=f(x)$ の C^r 座標近傍(U, α), (V, β)があって，つぎの3つの性質が成立することである．

(1) $f(U) \subset V$

(2) 適当な Banach 空間 F_1, E_1, E_2 があって，α に対する Banach 空間は $F_1 \times E_2$, β に対する Banach 空間は $E_1 \times E_2$ であって，U_1, V_1, V_2 を F_1, E_1, E_2 の適当な開集合とすると，$\alpha(U)=U_1 \times V_2$, $\beta(V)=V_1 \times V_2$ となり，さらに，$\alpha(x)=(0,0)$, $\beta(y)=(0,0)$, $\beta(V \cap N)=V_1 \times \{0\}$ をみたす．

(3) $f_{\alpha\beta}=\beta f \alpha^{-1} : U_1 \times V_2=\alpha(U) \to \beta(V)=V_1 \times V_2$ は

$$f_{\alpha\beta}(x_1, x_2)=(\bar{f}(x_1, x_2), x_2), \qquad (x_1, x_2) \in U_1 \times V_2$$

の形で表わされる．

この定理を証明する前に，つぎの重要な系を示すことにする．

系 X, M を C^r 多様体，N を M の部分多様体とする．いま，C^r 写像 $f: X \to M$ が N に横断的とすると，$f^{-1}(N) \neq \phi$ なら，$f^{-1}(N)$は X の部分多様体である．そして，$x \in f^{-1}(N)$に対して $T_x(f^{-1}(N))=(T_x f)^{-1} T_{f(x)}(N)$となる．したがって，特に，$T_x(X)/T_x(f^{-1}(N))$は $T_{f(x)}(M)/T_{f(x)}(N)$ と線型同相である．

系の証明 $x \in f^{-1}(N)$とする．系の仮定から，定理1が適用できる．いま定理と同じ記号を用いると，定理の(2), (3)から，$\alpha(U \cap f^{-1}(N))=U_1 \times \{0\}$ がわかる．したがって，$f^{-1}(N)$は M の部分多様体である．また，定義から，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} F_1 \times E_2 & \xrightarrow{\varphi_x{}^{(\alpha)}} & T_x(X) \\ {\scriptstyle Df_{\alpha\beta}(0,0)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle T_x f} \\ E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\varphi_{f(x)}{}^{(\beta)}} & T_{f(x)}(M) \end{array}$$

そして，$T_x(f^{-1}(N))$は F_1 に対応し，$T_{f(x)}(N)$は E_1 に対応する．また，(3)式から $Df_{\alpha\beta}(0,0)(u,v)=(D\bar{f}(0,0)(u,v), v)$, $(u,v) \in F_1 \times E_2$ である．そして，これは $T_x f$ に対応している．これから，系の後半は明らかである．▮

定理1の証明 C^r写像 $f: X\to M$ が点 $x\in M$ で N に横断的で，$y=f(x)\in N$ とする．N は部分多様体だから，点 y を含む M の適当な C^r 座標近傍 $(\tilde{V},\tilde{\beta})$と，$\tilde{\beta}$ に対する Banach 空間 E の適当な位相直和分解 $E=E_1\oplus E_2=E_1\times E_2$ があって，E_1, E_2 の適当な開集合 $V_1, \tilde{V}_2$ をとると $\tilde{\beta}(\tilde{V})=V_1\times\tilde{V}_2$, $\tilde{\beta}(\tilde{V}\cap N)=V_1\times\{0\}$ とできる．また，§1命題2から，$\tilde{\beta}(y)=(0,0)$としてもよい．

§1命題3系から，x を含む X の適当な C^r 座標近傍$(\tilde{U},\tilde{\alpha})$があって，$f(\tilde{U})\subset\tilde{V}$ で $\tilde{\beta}f\tilde{\alpha}^{-1}:\tilde{\alpha}(\tilde{U})\to\tilde{\beta}(\tilde{V})$は C^r 級となる．また，$\tilde{\alpha}(x)=0$ としてもよい．

いま，$\tilde{\alpha}$ に対する Banach 空間を F とすると，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi_x^{(\tilde{\alpha})}} & T_x(X) \\ {\scriptstyle D(\tilde{\beta}f\tilde{\alpha}^{-1})(0)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_xf} \\ E=E_1\times E_2 & \xrightarrow{\varphi_y^{(\tilde{\beta})}} & T_y(M) \end{array}$$

ここで，$,\varphi_x^{(\tilde{\alpha})},\varphi_y^{(\tilde{\beta})}$ は線型同相写像で，E_1 は $T_y(N)$に対応する．したがって，$\varphi_y^{(\tilde{\beta})}$ は自然に線型同相写像

$$\bar{\varphi}_y^{(\tilde{\beta})}:\ E/E_1\to T_y(M)/T_y(N)$$

をひき起こす．したがって，$E/E_1=E_2$ と自然に同一視すると，$\pi_2: E_1\times E_2\to E_2$ を第2成分への射影として，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} E=E_1\times E_2 & \xrightarrow{\varphi_y^{(\tilde{\beta})}} & T_y(M) \\ {\scriptstyle \pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_y} \\ E_2 & \xrightarrow{\bar{\varphi}_y^{(\tilde{\beta})}} & T_y(M)/T_y(N) \end{array}$$

すると，$f\pitchfork_x N$ の仮定から，p_yT_xf は全射で，その核 $\operatorname{Ker} p_yT_xf$ は $T_x(X)$ の位相直和因子である．したがって，$\operatorname{Ker} p_yT_xf$ に対応する F の部分ベクトル空間を F_1 とすると，これは F の位相直和因子で，$\pi_2D(\tilde{\beta}f\tilde{\alpha}^{-1})(0): F\to E_2$ は全射，そして，その核は F_1 となる．

いま，F_1 の位相補空間を F_2 とすると，$F=F_1\oplus F_2=F_1\times F_2$(位相直和)となる．そして，$\pi_2D(\tilde{\beta}f\tilde{\alpha}^{-1})(0)$は $F_2=F/F_1$ から E_2 の上への線型同相写像をひき起こす．そこで，この線型同相写像で F_2 と E_2 を同一視すると，$F=F_1\times E_2$

で $\pi_2 D(\tilde{\beta} f \tilde{\alpha}^{-1})(0): F_1 \times E_2 \to E_2$ は第2成分への射影と考えられる.

いま，つぎの写像の合成を考える.

$$\tilde{\alpha}(\tilde{U}) \xrightarrow{\tilde{\beta} f \tilde{\alpha}^{-1}} \tilde{\beta}(\tilde{V}) = V_1 \times \tilde{V}_2 \xrightarrow{\pi_2} \tilde{V}_2$$

すると，この写像の原点0における微係数は

$$D(\pi_2 \tilde{\beta} f \tilde{\alpha}^{-1})(0) = \pi_2 D(\tilde{\beta} f \tilde{\alpha}^{-1})(0)$$

で，$\tilde{\beta} f \tilde{\alpha}^{-1}(0)=0$ となる.

以上のことから，$\pi_2 \tilde{\beta} f \tilde{\alpha}^{-1}$ に逆関数の定理系2が適用できて，$F=F_1 \times E_2$ の原点の適当な近傍 W_1, W_2 と，適当な C^r 微分同相写像 $g: W_1 \to W_2$ があって，$\pi_2 \tilde{\beta} f \tilde{\alpha}^{-1} g: W_1 \cap g^{-1}(\tilde{\alpha}(\tilde{U})) \to \tilde{V}_2 \subset E_2$ は，第2成分への射影である.

いま $U=\alpha^{-1}(W_2) \cap \tilde{U}$, $\alpha=g^{-1}\tilde{\alpha}|U$ とおくと，(U, α)は点 x を含む X の C^r 座標近傍となるが(§1命題2)，必要なら U をさらに小さくとって，$\alpha(U)=U_1 \times V_2$(U_1, V_2 は F_1, E_2 の原点を含む開集合で，$V_2 \subset \tilde{V}_2$ をみたす)の形にすることができる．そして，$V=\tilde{\beta}^{-1}(V_1 \times V_2)$，$\beta=\tilde{\beta}|V_1 \times V_2$ とおくと，(V, β) は y を含む M の C^r 座標近傍で，$(U, \alpha), (V, \beta)$は定理1の条件をみたす.

逆に，C^r 写像 $f: X \to M$ が定理1の条件(1), (2), (3)をみたすとき，f が点 x で N に横断的となることは，簡単に確かめられるので，省略する. ∎

M を C^r 多様体とし，Δ を $M \times M$ の対角線集合とする．すなわち，$\Delta=\{(x, x);\ x \in M\}$ である．Δ は M の恒等写像 $1: M \to M$ のグラフであるから，例2によって $M \times M$ の閉部分多様体となる．そして，§1の命題7によって，点$(z, z) \in \Delta$ における $M \times M$ の接ベクトル空間 $T_{(z,z)}(M \times M)$を $T_z(M) \times T_z(M)$と同一視すると，$T_{(z,z)}(\Delta)=\{(u, u);\ u \in T_z(M)\}$ となることがわかる.

いま，X, Y を C^r 多様体，$f: X \to M$, $g: Y \to M$ を C^r 写像とする．このとき，$f \times g: X \times Y \to M \times M$ が Δ に横断的なら，f と g は**横断的**という.

定義から，$f \times g: X \times Y \to M \times M$ が点$(x, y) \in X \times Y$ で Δ に横断的ということは，$f(x) \neq f(y)$であるか，または $f(x)=f(y)$なら，$f \times g$ の(x, y)における微分 $T_{(x,y)}(f \times g): T_{(x,y)}(X \times Y) \to T_{(z,z)}(M \times M)$，$z=f(x)=f(y)$に対して

$$(*) \quad \mathrm{Im}\, T_{(x,y)}(f \times g) + T_{(z,z)}(\Delta) = T_{(z,z)}(M \times M)$$

が成立し，$\{T_{(x,y)}(f \times g)\}^{-1}(T_{(z,z)}(\Delta))$が $T_{(x,y)}(X \times Y)$の位相直和因子とな

ることである.

いま，§1命題7の同一視を行うと，上の条件(＊)は，つぎの条件(＊＊)と同値である.

(＊＊)　$\mathrm{Im}\ T_x f + \mathrm{Im}\ T_y g = T_z(M)$

また，X, Y が有限次元なら，位相直和因子という条件は常にみたされているから，これを合わせて，つぎの命題を得る.

命題 5　X, Y, M を C^r 多様体，$f: X \to M$，$g: Y \to M$ を C^r 写像とする．いま X, Y が有限次元とすると，f と g が横断的となるための必要十分条件は，$f(x)=g(y)$ となる任意の $x \in X$，$y \in Y$ に対して

$$\mathrm{Im}\ T_x f + \mathrm{Im}\ T_y g = T_z(M), \qquad z = f(x) = g(y)$$

が成立することである.

§3　ベクトル束

この§では，C^0 多様体とは位相空間，その部分多様体とは部分空間，C^0 写像は連続写像を意味するものとする．そして，r を 0，正の整数，または ∞ とする.

$E(\xi), B(\xi)$ を C^r 多様体，$\pi(\xi): E(\xi) \to B(\xi)$ を C^r 写像とする．いま，$\pi(\xi)$ が全射で，$B(\xi)$ の各点 x にたいし，$E(\xi)_x = \pi(\xi)^{-1}(x)$ が Banach 空間の構造をもつ位相ベクトル空間とする．以下，この条件をみたす $E(\xi), B(\xi), \pi(\xi)$ の対を $\xi = (E(\xi), B(\xi), \pi(\xi))$ と表わし，$E(\xi)$ をその**全空間**，$B(\xi)$ を**底空間**，$\pi(\xi)$ を**射影**，$E(\xi)_x$ を**点** x **の上のファイバー**という．以下，簡単のため，$E(\xi)=E$，$B(\xi)=B$，$\pi(\xi)=\pi$，$E(\xi)_x=E_x$ と略記することにする.

いま，U を B の開集合とすると，$\pi^{-1}(U)$ は E の開集合，すなわち開部分多様体である．そこで，適当な Banach 空間 F と $\pi^{-1}(U)$ から $U \times F$ への C^r 微分同相写像 $h: \pi^{-1}(U) \to U \times F$ があって，つぎの図が可換，すなわち，$\pi = p_1 h$ とする.

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U\times F \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad U \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \end{array}$$

ここで，p_1 は第1成分への射影とする．すると，U の各点 x に対して $h(E_x)=h(\pi^{-1}(x))=\{x\}\times F$ となる．そこで，$h(z)=(x,h_x(z))$，$z\in E_x$ によって定まる写像 $h_x: E_x\to F$ を考えると，これは全単射である．いま，この h_x，$x\in U$ が線型同相写像となるとき，このような U,F,h の組 (U,F,h) を (E,B,π) の**束座標近傍**という．

(E,B,π) の束座標近傍の集まり $\mathcal{U}=\{(U_i,F_i,h_i);\ i\in I\}$ がつぎの2つの条件をみたすとき，これを (E,B,π) の **C^r 束座標近傍系**という．

(1)　$\{U_i,\ i\in I\}$ は B の開被覆である．

(2)　$x\in U_{i_1}\cap U_{i_2}$, $(i_1,i_2\in I)$ に対して

$$h_{i_1i_2}(x)=h_{i_1x}h_{i_2x}{}^{-1}:\ F_{i_1}\to F_{i_2}$$

とおくと，これは線型同相写像である．すなわち，$h_{i_1i_2}(x)\in \mathrm{Iso}\,(F_{i_1},F_{i_2})\subset \mathcal{L}(F_{i_1};F_{i_2})$ となる．これによって定まる写像 $h_{i_1i_2}: U_{i_1}\cap U_{i_2}\to\mathcal{L}(F_{i_1};F_{i_2})$ は C^r 級である．

(E,B,π) の2つの C^r 束座標近傍系を $\mathcal{U}=\{(U_i,F_i,h_i);\ i\in I\}$，$\mathcal{V}=\{(V_j,G_j,k_j);\ j\in J\}$ とする．いま，任意の $i\in A$，$j\in B$ に対して

$$g_{ij}(x)=k_{jx}h_{ix}{}^{-1},\qquad g_{ji}'(x)=h_{ix}k_{jx}{}^{-1},\qquad x\in U_i\cap V_j$$

とおく．すると，写像 $g_{ij}: U_i\cap V_j\to\mathcal{L}(F_i;G_j)$ および $g_{ji}': U_i\cap V_j=V_j\cap U_i\to\mathcal{L}(G_j;F_i)$ が定義されるが，これらが C^r 級となるとき，$\mathcal{U}\sim\mathcal{V}$ と表わすことにする．

補題 1　g_{ij}, g_{ji}' のどちらか一方が C^r 級なら，他方は C^r 級である．したがって，$\mathcal{U}\sim\mathcal{V}$ となるための必要十分条件は，g_{ij} または g_{ji}' が C^r 級 $(i\in I, j\in J)$ となることである．

証明　$g_{ji}'(x)=\{g_{ij}(x)\}^{-1}$，$x\in U_i\cap V_j$ であるから，写像 $h:\mathrm{Iso}\,(F_i,G_j)\to\mathrm{Iso}\,(G_j,F_i)$ を $h(L)=L^{-1}$ で定義される C^∞ 写像とすると(第5章§3命題5)，g_{ji}' はつぎの写像の合成である．

$$U_i\cap V_j \xrightarrow{g_{ij}} \mathrm{Iso}\,(F_i, G_j) \xrightarrow{h} \mathrm{Iso}\,(G_j, F_i) \subset \mathcal{L}(G_j\,; F_i)$$

したがって，g_{ij} が C^r 級なら g_{ji}' も C^r 級である．▌

命題 1 (E,B,π)の C^r 束座標近傍系の間の関係 ∼ は同値関係である．

証明 反射律と対称律は定義から明らかである．したがって，推移律を示せば十分である．いま，$\mathcal{U}=\{(U_i, F_i, h_i)\,;\ i\in I\}$，$\mathcal{V}=\{(V_j, G_j, k_j)\,;\ j\in J\}$，$\mathcal{W}=\{(W_s, H_s, l_s)\,;\ s\in S\}$ を(E,B,π)の C^r 束座標近傍とし，$\mathcal{U}\sim\mathcal{V}$，$\mathcal{V}\sim\mathcal{W}$ とする．そして$\mathcal{U}\sim\mathcal{W}$ を証明しよう．いま，$i\in I$，$s\in S$ とする．$x\in U_i\cap W_s$ に対して $d_{is}(x)=l_{sx}h_{ix}^{-1}$ とおき，写像 $d_{is}: U_i\cap W_s\to\mathcal{L}(F_i\,; H_s)$が C^r 級になることをいえばよい．

$x_0\in U_i\cap W_s$ とする．すると，$\{V_j;\ j\in J\}$ は B の開被覆だから，$x_0\in V_j$ となる V_j が存在する．すると，仮定から

$$g_{ij}(x) = k_{jx}h_{ix}^{-1}, \qquad x\in U_i\cap V_j,$$
$$f_{js}(x) = l_{sx}k_{jx}^{-1}, \qquad x\in V_j\cap W_s$$

で定義される写像 $g_{ij}: U_i\cap V_j\to\mathcal{L}(F_i\,; G_j)$，および $f_{js}: V_j\cap W_s\to\mathcal{L}(G_j\,; H_s)$ は C^r 級である．

一方，$x\in U_i\cap V_j\cap W_s$ に対して，$d_{is}(x)=f_{js}(x)g_{ij}(x)$が成立するから，$d_{is}|U_i\cap V_j\cap W_s$ はつぎの写像の合成である．

$$U_i\cap V_j\cap W_s \xrightarrow{(g_{ij},f_{js})} \mathcal{L}(F_i\,; G_j)\times\mathcal{L}(G_j\,; H_s) \xrightarrow{\mathrm{comp}} \mathcal{L}(F_i\,; H_s)$$

ここで，g_{ij}, f_{js} は C^r 級で，comp は連続 2 重線型写像であるから，$d_{is}|U_i\cap V_j\cap W_s$ は C^r 級である．したがって，d_{is} は x_0 で C^r 級となり，$U_i\cap W_s$ で C^r 級である．▌

(E,B,π)の C^r 束座標近傍系の間のこの同値関係 ∼ の同値類を(E,B,π)の **C^r ベクトル束構造**という．そして，(E,B,π)に 1 つの C^r ベクトル束構造をつけて考えるとき，これを **C^r ベクトル束**という．

C^r ベクトル束(E,B,π)に対して，この C^r ベクトル束構造を定める C^r 束座標近傍系を，単に，(E,B,π)の **C^r 束座標近傍系**といい，これに属する束座標近傍を，C^r ベクトル束(E,B,π)の **C^r 束座標近傍**という．そして，$x\in U$ となる束座標近傍(U,F,h)を **x を含む束座標近傍**という．

(E, B, π)を C^r ベクトル束とする．§1と同様に，つぎのことがわかる．すなわち，B の点 x を含む任意の C^r 束座標近傍(U, F, h)に対して，F は x の上のファイバー E_x と線型同相な Banach 空間である．

また，Banach 空間 F を固定したとき，ファイバー E_x が F と線型同相となるような点 $x \in B$ 全体の集合を B_F とすると，これは B の開かつ閉集合となる．したがって，B 連結なら，$B_F = \phi$ かまたは $B_F = B$ となる．

一般に，$B_F = B$ となるような C^r ベクトル束(E, B, π)を **C^rF ベクトル束**という．特に，F が有限次元で $\dim F = n$ のとき，これを **n 次元 C^r ベクトル束**という．

§1命題2と同様に，つぎの命題が成立する．

命題 2 (E, B, π)を C^r ベクトル束とする．このとき，つぎの性質が成立する．

(1) (E, M, π)の2つの C^r 束座標近傍を(U, F, h), (V, G, k)とすると，$g(x) = k_x h_x^{-1} : F \to G$, $x \in U \cap V$ によって定まる写像 $g : U \cap V \to \mathcal{L}(F ; G)$は C^r 級である．

(2) $\mathcal{U} = \{(U_i, F_i, h_i) ;\ i \in I\}$ を(E, B, π)の C^r 束座標近傍系，(V, G, k)を(E, B, π)の束座標近傍とする．いま，任意の $i \in I$ に対して，$f_i(x) = k_x h_{ix}^{-1}$, $x \in U_i \cap V$, および $f_i'(x) = h_{ix} k_x^{-1}$, $x \in U_i \cap V$ によって定義される写像

$$f_i : U_i \cap V \to \mathcal{L}(F_i ; G), \qquad f_i' : U_i \cap V \to \mathcal{L}(G ; F_i)$$

のどちらか一方が C^r 級なら，(V, G, k)は(E, B, π)の C^r 束座標近傍である．

(3) (U, F, h)を(E, B, π)の C^r 束座標近傍とする．いま，U' を U の開集合とし，$h' = h|\pi^{-1}(U') : \pi^{-1}(U') \to U' \times F$ とすると，(U', F, h')は(E, B, π)の C^r 束座標近傍である．

例 1 B を C^r 多様体，F を Banach 空間とする．いま，$\pi : B \times F \to B$ を第1成分への射影とする．すると，π は C^r 級の全射である．そして，B の各点 x に対して $E_x = \pi^{-1}(x) = \{x\} \times F$ となり，自然に F と同一視される．したがって，E_x は Banach 空間の構造をもつ．

さらに，$B \times F$ の恒等写像を $1 : B \times F = \pi^{-1}(B) \to B \times F$ とすると，$(B \times F, F,$

1)は$(B\times F, B, \pi)$の束座標近傍となり，$\{(B\times F, F, 1)\}$はそのC^r束座標近傍系となる．このようにして定まるC^rベクトル束$(B\times F, B, \pi)$を**積ベクトル束**という．

例 2 (E, B, π)をC^rベクトル束とする．いまB'をBの部分多様体とする．そして$E_{B'}=\pi^{-1}(B')$，$\pi_{B'}=\pi|E_{B'}: E_{B'}\to B'$とおく．このとき，$(E_{B'}, B', \pi_{B'})$が自然に$C^r$ベクトル束の構造をもつことを証明しよう．

いま，$x\in B'$とし，xを含むC^r束座標近傍を(U, F, h)とする．すると，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U\times F \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & U & \end{array}$$

B'がBの部分多様体だから，必要なら，さらにUを小さくとって，(U, α)がBのC^r座標近傍で，αに対するBanach空間Gの適当な位相直和分解$G=G_1\oplus G_2=G_1\times G_2$をとると，$\alpha(U)=U_1\times U_2$($U_1, U_2$は$G_1, G_2$の開集合)で$\alpha(U\cap B')=U_1\times\{a_2\}$，$a_2\in U_2$となるようにできる(上の命題2と§1命題2)．

いま，Fの恒等写像を$1: F\to F$とすると，$(\pi^{-1}(U), (\alpha\times 1)h)$は$E$の$C^r$座標近傍で，$(\alpha\times 1)h(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(B'))=(\alpha\times 1)h\pi^{-1}(U\cap B')=(\alpha\times 1)p_1^{-1}(U\cap B')=(\alpha\times 1)((U\cap B')\times F)=U_1\times\{a_2\}\times F$となる．したがって，$\pi^{-1}(B')$は$E$の部分多様体である．そして，$i: \pi^{-1}(B')\to E$を包含写像とすると，$\pi_{B'}=\pi i$となるから，$\pi_{B'}$は$C^r$級である．そして，$\pi_{B'}$が全射となることは明らかで，$\pi_{B'}{}^{-1}(x)=\pi^{-1}(x)=E_x$である．

さて，このような性質をもつ(E, B, π)のC^r座標近傍(U, F, h)が，B'の各点に対して存在するが，これに対して$(U\cap B', F, h|\pi^{-1}(U\cap B'))$を考えると，これは$(E_{B'}, B', \pi_{B'})$の束座標近傍である．そして，このような束座標近傍$(U\cap B', F, h|\pi^{-1}(U\cap B'))$全体の集合が$(E_{B'}, B', \pi_{B'})$の$C^r$束座標近傍となることは，簡単に証明できる．このようにして定まるC^rベクトル束$(E_{B'}, B', \pi_{B'})$をC^rベクトル束$\xi=(E, B, \pi)$のB'への**制限**といい，$\xi|B'$で表わす．

つぎに，命題3によって，C^r多様体B上のベクトル束を構成する方法を述

べる．そこで，この命題の証明の際に必要な補題を証明しておくことにする．

補題 2　E を集合とし，$\{O_i;\ i\in I\}$ をその部分集合族，$\{G_i;\ i\in I\}$ を Banach 空間の集まり，$h_i: O_i\to G_i$ を O_i から G_i の開集合 $h_i(O_i)$ への全単射とする．いま，これらがつぎの3つの条件をみたすものとする．

(1)　$\bigcup_{i\in I} O_i = E$

(2)　E の2点 x_1, x_2, $(x_1 \neq x_2)$ に対して，適当な $i_1, i_2 \in I$ をとって，$x_1\in O_{i_1}$, $x_2\in O_{i_2}$, $O_{i_1}\cap O_{i_2}=\phi$ とできる．

(3)　任意の $i_1, i_2 \in I$ に対して，$h_{i_1}(O_{i_1}\cap O_{i_2})$, $h_{i_2}(O_{i_1}\cap O_{i_2})$ は G_{i_1}, G_{i_2} の開集合であって，

$$h_{i_2}h_{i_1}^{-1}:\ h_{i_1}(O_{i_1}\cap O_{i_2})\to h_{i_2}(O_{i_1}\cap O_{i_2})$$

は C^r 写像である．

このとき，E に適当な位相構造および C^r 微分可能構造を入れて，$\{(O_i, h_i);\ i\in I\}$ がその C^r 座標近傍系となるようにできる．そして，このような E の位相構造は1つに限る．

注意　$(h_{i_2}h_{i_1}^{-1})^{-1}=h_{i_1}h_{i_2}^{-1}$ も C^r 級であるから，$h_{i_2}h_{i_1}^{-1}$ は C^r 微分同相写像である．また，$h_{i_1}(O_{i_1}\cap O_{i_2})$ が G_{i_1} の開集合という仮定だけでも十分である．なんとなれば，i_1 と i_2 の立場を入れかえて考えればよいからである．

証明　E の部分集合族 $\mathcal{O}$ をつぎのように定義する．すなわち，A を E の部分集合とし，各 $i\in I$ に対して $h_i(A\cap O_i)$ が G_i の開集合（$h_i(O_i)$ が G_i の開集合だから，これが $h_i(O_i)$ の開集合といっても同じことである）のとき，$A\in\mathcal{O}$ と定義する．

$A=\phi$ とすると $h_i(\phi\cap O_i)=\phi$, $i\in I$ だから $\phi\in\mathcal{O}$ となる．また $A=E$ とすると $h_i(E\cap O_i)=h_i(O_i)$, $i\in I$ だから $E\in\mathcal{O}$ となる．

つぎに，$A_1, A_2\in\mathcal{O}$ とすると，各 $i\in I$ に対して h_i が全単射であることに注意すると，$h_i((A_1\cap A_2)\cap O_i)=h_i((A_1\cap O_i)\cap(A_2\cap O_i))=h_i(A_1\cap O_i)\cap h_i(A_2\cap O_i)$ となる．ここで，$h_i(A_1\cap O_i)$, $h_i(A_2\cap O_i)$ は G_i の開集合だから，その共通部分 $h_i((A_1\cap A_2)\cap O_i)$ も G_i の開集合となる．すなわち，$A_1\cap A_2\in\mathcal{O}$ である．

また $A_\lambda \in \mathcal{O}$ とすると，$h_i((\bigcup_\lambda A_\lambda) \cap O_i) = h_i(\bigcup_\lambda (A_\lambda \cap O_i)) = \bigcup_\lambda h_i(A_\lambda \cap O_i)$ となる．ここで，$h_i(A_\lambda \cap O_i)$は G_i の開集合だから，その和集合 $h_i((\bigcup_\lambda A_\lambda) \cap O_i)$ も G_i の開集合である．すなわち，$\bigcup_\lambda A_\lambda \in \mathcal{O}$ となる．

以上で $\mathcal{O}$ が E の位相構造となることがわかった．そして，この位相に関して各 $O_i, i \in I$ が E の開集合となることは，条件(3)の前半からわかる．また，条件(2)から E はこの位相で Hausdorff 空間となる．

つぎに $h_i : O_i \to G_i$ が O_i から $h_i(O_i)$への同相写像となることを証明しよう．

いま，B が $h_i(O_i)$の開集合とする．すると，各 $i_1 \in I$ に対して $h_{i_1}(h_i^{-1}(B) \cap O_{i_1}) = h_{i_1} h_i^{-1}(B)$となる．上の注意から，$h_{i_1} h_i^{-1}$ は C^r 微分同相写像であるから，これは $h_{i_1}(O_i \cap O_{i_1})$の開集合である．(3)から $h_{i_1}(O_i \cap O_{i_1})$は G_{i_1} の開集合，したがって，$h_{i_1}(h_i^{-1}(B) \cap O_{i_1})$は G_{i_1} の開集合となる．すなわち，$h_i^{-1}(B)$ は E の開集合である．ゆえに，第2章§3定理1から，h_i は連続である．

つぎに，A を O_i の開集合とする．すると，O_i は E の開集合だから，A は E の開集合である．したがって，$h_i(A) = h_i(A \cap O_i)$は G_i の開集合，すなわち $h_i(O_i)$の開集合となる．以上で h_i^{-1} の連続性がわかり，したがって，h_i が同相写像であることがわかった．

以上から，(O_i, h_i)は E の座標近傍となることがわかったが，(1)と(3)の後半から，$\{(O_i, h_i);\ i \in I\}$ は E の C^r 座標近傍系となる．

最後に $\{(O_i, h_i);\ i \in I\}$ が E の C^r 座標近傍系となるような E の位相は，上のように定めたものに限ることもすぐわかる．▌

命題 3 E を集合，B を C^r 多様体，$\pi : E \to B$ を全射とする．いま，B の開被覆 $\{U_i;\ i \in I\}$，Banach 空間の集まり $\{F_i;\ i \in I\}$，および全単射 $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F_i,\ i \in I$ の集まりがあって，つぎの図が可換とする．

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{h_i} & U_i \times F_i \\ & {}_{\pi}\searrow \quad \swarrow_{p_1} & \\ & U_i & \end{array}$$

(ここで，p_1 は第1成分への射影とする．)

このとき，U_i の各点 x に対して，h_i は自然な全単射 $h_{ix} : E_x = \pi^{-1}(x) \to F_i$ をひき起こす．いま $i_1, i_2 \in I$ に対して $h_{i_1 i_2}(x) = h_{i_2 x} h_{i_1 x}^{-1} : F_{i_1} \to F_{i_2},\ x \in U_{i_1} \cap$

U_{i_2} とおくとき，これが線型同相写像であって，これによって定まる写像

$$h_{i_1i_2}:\ U_{i_1}\cap U_{i_2}\to \mathscr{L}(F_{i_1};F_{i_2})$$

が C^r 級とする．

以上の条件が成立するとき，E に適当な位相と C^r 微分可能構造を入れて，$\{(U_i,F_i,h_i);\ i\in I\}$ が (E,B,π) の C^r 束座標近傍系となるようにできる．そして，このような E の位相と C^r 微分可能構造はただ1つに限る．

証明 B が C^r 多様体(したがって Hausdorff 空間)で，$\{U_i;\ i\in I\}$ は B の開被覆だから，つぎの性質をみたす B の開被覆 $\{V_j;\ j\in J\}$ が存在する．

(a) 各 $j\in J$ に対して，V_j を含む $U_{i(j)}$，$i(j)\in J$ が存在し(すなわち $\{V_j;\ j\in J\}$ は $\{U_i;\ i\in I\}$ の細分)，さらに，適当な Banach 空間 G_j と V_j から G_j の開集合への同相写像 $\beta_j: V_j\to G_j$ があって，(V_j,β_j) は B の C^r 座標近傍となる．

(b) B の相異なる2点 x_1,x_2 に対し，適当な $j_1,j_2\in J$ があって，$x_1\in V_{j_1}$，$x_2\in V_{j_2}$，$V_{j_1}\cap V_{j_2}=\phi$ とできる．

さて，各 $j\in J$ に対して，(a)の性質をみたす $i(j)\in I$ を固定する．そして，$H_j=F_{i(j)}$，$j\in J$，$k_j=h_{i(j)}|\pi^{-1}(V_j):\ \pi^{-1}(V_j)\to V_j\times H_j$ とおくと，$\{V_j;\ j\in J\}$，$\{H_j;\ j\in J\}$，$\{k_j;\ j\in J\}$ はこの命題3の条件をみたしている．

いま，H_j の恒等写像を1として，$\alpha_j=(\beta_j\times 1)k_j:\pi^{-1}(V_j)\to G_j\times H_j$ とおくと，これは $\pi^{-1}(V_j)$ から Banach 空間 $G_j\times H_j$ の開集合 $\beta_j(V_j)\times H_j$ への全単射である．いま，$\{V_j;\ j\in J\}$，$\{G_j\times H_j;\ j\in J\}$，$\{\alpha_j;\ j\in J\}$ が補題2の条件をみたすことをいう．

補題2の(1)，(2)および(3)の前半の各条件が成立することは，定義と上の(a)，(b)からすぐわかる．したがって，(3)の後半が成立することがわかればよい．

いま，$j_1,j_2\in J$ とすると，定義から

$$\alpha_{j_2}\alpha_{j_1}{}^{-1}:\ \beta_{j_1}(V_{j_1}\cap V_{j_2})\times H_{j_1}\to\beta_{j_2}(V_{j_1}\cap V_{j_2})\times H_{j_2}$$

は $\alpha_{j_2}\alpha_{j_1}{}^{-1}(x,y)=(\beta_{j_2}\beta_{j_1}{}^{-1}(x),\ k_{j_2z}k_{j_1z}{}^{-1}(y))$，$z=\beta_{j_1}{}^{-1}(x)$ で与えられる．ここで，(V_{j_1},β_{j_1})，(V_{j_2},β_{j_2}) が B の C^r 座標近傍であることから $\beta_{j_2}\beta_{j_1}{}^{-1}$ は C^r 級と

なる．また，この第2成分を与える写像は，つぎの写像の合成である．

$$\beta_{j_1}(V_{j_1}\cap V_{j_2})\times H_{j_1}\xrightarrow{\beta_{j_1}^{-1}\times 1}(V_{j_1}\cap V_{j_2})\times H_{j_1}\xrightarrow{k_{j_1j_2}\times 1}\mathscr{L}(H_{j_1};H_{j_2})\times H_{j_1}$$
$$\xrightarrow{\mathrm{ev}'}H_{j_2}$$

ここで，$k_{j_1j_2}$ は $k_{j_1j_2}(z)=k_{j_2z}k_{j_1z}^{-1}$，$z\in V_{j_1}\cap V_{j_2}$ によって定まる写像で，仮定から C^r 級である．そして，ev′ は $\mathrm{ev}'(L,x)=L(x)$，$(L,x)\in\mathscr{L}(H_{j_1};H_{j_2})\times H_{j_1}$ によって定まる連続2重線型写像である．したがって，これらの合成写像は C^r 級である．

以上で $\alpha_{j_2}\alpha_{j_1}^{-1}$ が C^r 級であることがわかった．そこで，補題2から，E に適当な位相を入れて $\{(V_j,\alpha_j);\ j\in J\}$ がその C^r 座標近傍系となるような C^r 微分可能構造が入ることがわかる．

また，つぎの図が可換となることから，π が C^r 級であることもわかる．

$$\begin{array}{ccccc}\pi^{-1}(V_j) & \xrightarrow{k_j} & V_j\times H_j & \xrightarrow{\beta_j\times 1} & G_j\times H_j\\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \ \swarrow{\scriptstyle p_1} & & & \downarrow{\scriptstyle p_1}\\ & V_j & \xrightarrow{\beta_j} & & G_j\end{array}$$

そして，B の各点 x に対して，$E_x=\pi^{-1}(x)$ は $\alpha_j=(\beta_j\times 1)k_j$ によって $\{x\}\times H_j$ に対応するから，これによって，E_x に Banach 空間の構造を入れることができる．

以上と命題の仮定から，$\{(V_j,H_j,k_j);\ j\in J\}$ が (E,B,π) の C^r 束座標近傍系となることがわかる．そして，命題2から，(U_i,F_i,h_i)，$i\in I$ がこの C^r ベクトル束 (E,B,π) の C^r 束座標近傍となることもわかる．

最後に，このような E の位相と C^r 微分可能構造が上に定義したものに限ることも，簡単にわかる．∎

例 3　M を C^r 多様体とする $(r\geqq 1)$．点 $x\in M$ における M の接ベクトル空間を $T_x(M)$ とし，$T(M)=\bigcup_{x\in M}T_x(M)$ とおく．そして，$\pi: T(M)\to M$ を $v\in T_x(M)$ に対して $x\in M$ を対応させる写像とする．すると，π は全射である．

M の C^r 座標近傍系を $\{(U_\alpha,\alpha);\ \alpha\in A\}$ とする．そして，α に対する Banach 空間を E_α とする．いま

$$h_\alpha:\ \pi^{-1}(U_\alpha)=\bigcup_{x\in U_\alpha}T_x(M)\to U_\alpha\times E_\alpha$$

を，$v \in T_x(M)$，$x \in U_\alpha$ に対して $h_\alpha(v)=(x, \{\varphi_x^{(\alpha)}\}^{-1}(v))$によって定まる写像とする．ここで，$\varphi_x^{(\alpha)}: E_\alpha \to T_x(M)$は§1の線型同相写像である．

すると，h_α は全単射で，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \times E_\alpha \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \\ & U_\alpha & \end{array}$$

そして，$\alpha_1, \alpha_2 \in A$ に対して，$x \in U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ として，

$$h_{\alpha_1\alpha_2}(x) = h_{\alpha_2 x} h_{\alpha_1 x}^{-1} = \{\varphi_x^{(\alpha_2)}\}^{-1} \varphi_x^{(\alpha_1)} = D(\alpha_2 \alpha_1^{-1})(\alpha_1(x))$$

が成立する．したがって，$h_{\alpha_1\alpha_2}(x): E_{\alpha_1} \to E_{\alpha_2}$ は線型同相写像で，これによって定まる写像 $h_{\alpha_1\alpha_2}: U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \to \mathcal{L}(E_{\alpha_1}; E_{\alpha_2})$は C^{r-1} 級である($\alpha_2\alpha_1^{-1}$ が C^r 級だから)．

以上から，命題3によって，$\tau(M)=(T(M), M, \pi)$は C^{r-1} ベクトル束と考えられる．これを M の**接ベクトル束**という．

例 4　M が Banach 空間 E の開部分多様体のとき，M の接ベクトル束は積ベクトル束と同一視できる．

これから，C^r ベクトル束の間の準同型写像を定義することにする．

いま，$\xi=(E, B, \pi)$，$\xi'=(E', B', \pi')$を C^r ベクトル束とする．C^r 写像 $\bar{f}: E \to E'$，$f: B \to B'$ の対$(\bar{f}, f)$が，つぎの2つの条件をみたすとき，これを ξ から ξ' への **C^r 束準同型写像**という．

(1)　つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

すなわち，$f\pi=\pi'\bar{f}$ である．したがって，$\bar{f}$ は点 $x \in B$ の上のファイバー $E_x=\pi^{-1}(x)$から $f(x)$の上のファイバー $E_{f(x)}'=\pi'^{-1}(f(x))$への写像 $\bar{f}_x: E_x \to E_{f(x)}'$ をひき起こすが，これは連続線型写像である．

(2)　B の各点 x_0 に対して，x_0 および $f(x_0)$を含む ξ, ξ' の適当な C^r 束座標近傍(U, F, h)および(V, G, k)があって，$f(U) \subset V$ となり，さらに $x \in U$ に

対して

$$g(x)=k_{f(x)}\bar{f}_x h_x{}^{-1}:\ F\to G$$

とおくと，これによって定まる写像 $g: U\to\mathcal{L}(F;G)$ は C^r 級である．

命題 4 $\xi=(E,B,\pi)$，$\xi'=(E',B',\pi')$ を C^r ベクトル束とし，$f: B\to B'$ を C^r 写像とする．いま，B の各点 x に対して，連続線型写像 $\bar{f}_x: E_x=\pi^{-1}(x)\to E_{f(x)}{}'=\pi^{-1}(f(x))$ があって，上の条件(2)が成立するとき，この $\bar{f}_x, x\in B$ によって定義される写像 $\bar{f}: E\to E'$ と $f: B\to B'$ の対 $(\bar{f},f)$ は，ξ から ξ' への C^r 束準同型写像である．

証明 $\bar{f}$ の定義から(1)が成立する．したがって，$\bar{f}: E\to E'$ が C^r 級であることをいえば十分である．

いま，(2)をみたす (U,F,h)，(V,G,k) をとる．そして

$$\bar{g}:\ U\times F\to V\times(\mathcal{L}(F;G)\times F)$$

を $\bar{g}(x,y)=(f(x),(g(x),y))$，$(x,y)\in U\times F$ と定義すると，これは C^r 級である．そして，$\bar{f}|\pi^{-1}(U): \pi^{-1}(U)\to\pi'^{-1}(V)$ はつぎの写像の合成である．

$$\pi^{-1}(U)\xrightarrow{h}U\times F\xrightarrow{\bar{g}}V\times(\mathcal{L}(F;G)\times F)$$
$$\xrightarrow{1\times\mathrm{ev}'}V\times G\xrightarrow{k^{-1}}\pi^{-1}(V)$$

ここで，h,k は C^r 微分同相写像，$\mathrm{ev}': \mathcal{L}(F;G)\times F\to G$ は連続 2 重線型写像だから，この合成は C^r 級である．▌

$\xi=(E,B,\pi)$，$\xi'=(E',B',\pi')$ を C^r ベクトル束とし，$(\bar{f},f)$ を ξ から ξ' への C^r 束準同型写像とする．いま，B の各点 x に対して，$\bar{f}_x: E_x\to E_{f(x)}{}'$ が線型同相写像となるとき，$(\bar{f},f)$ を **C^r 束写像**という．

また，$\bar{f}: E\to E'$，$f: B\to B'$ がともに全単射であって，$(\bar{f},f)$ および $(\bar{f}^{-1},f^{-1})$ がともに C^r 束準同型写像のとき，$(\bar{f},f)$ を **C^r 束同型写像**という．このとき，$(\bar{f},f)$ は C^r 束写像となることはすぐわかる．

C^r 束同型写像が存在するような 2 つの C^r ベクトル束は，互に **C^r 束同型**という．この関係が同値関係であることはすぐわかる．

C^r 束同型写像 $(\bar{f},f)$ において，$B=B'$ で f が B の恒等写像のとき，これを **C^r 束同値写像**という．そして，このような C^r 束同値写像が存在する 2 つの

C^r ベクトル束は，**C^r 束同値**という．これも同値関係である．

例 5 $\xi'=(E',B',\pi')$をC^r ベクトル束とする．いま，B' を C^r 多様体，$f:B\to B'$ を C^r 写像とする．このとき，B 上の C^r ベクトル束 $f^*\xi'$ と，$f^*\xi'$ から ξ への C^r 束写像$(\bar{f},f)$を，つぎのように構成する．

$B\times E'$ の部分集合 $E=f^*E'$ を $f^*E'=\{(x,v)\in B\times E';\ f(x)=\pi(v)\}$ と定義し，$\pi: f^*E'\to B$ を $\pi(x,v)=x$, $(x,v)\in f^*E'$ と定義する．すると，$E_x=\pi^{-1}(x)=\{x\}\times E_{f(x)}{}'$, $x\in B$ となるから，π は全射である．

いま，$\{(U_i',F_i',h_i');\ i\in I\}$ を ξ' の C^r 束座標近傍系とする．そして，$U_i=f^{-1}(U_i')$, $F_i=F_i'$, $i\in I$ とおく．すると，$\pi^{-1}(U_i)=\bigcup_{x\in U_i}\{x\}\times E_{f(x)}{}'$ となる．そこで，$h_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times F_i$ を $h_i(x,v)=(x,\ h_{if(x)}{}'(v))$, $(x,v)\in\pi^{-1}(U_i)$ で定義することができる．ここで，$h_{if(x)}{}':E_{f(x)}{}'\to F_i'=F_i$ は h_i' から定まる線型同相写像とする．

すると，h_i は全単射で，つぎの図は可換となる．

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{h_i} & U_i\times F_i \\ & {}_{\pi}\searrow \quad U_i \quad \swarrow_{p_1} & \end{array}$$

そして，$E_x=\{x\}\times E_{f(x)}{}'$ と $E_{f(x)}{}'$ を同一視すれば，$h_{ix}=h_{if(x)}{}':E_x\to F_i$, $x\in U_i$ と考えてよい．したがって，$i_1,i_2\in I$ に対して，

$$h_{i_1i_2}(x)=h_{i_2x}h_{i_1x}{}^{-1}=h_{i_2f(x)}{}'(h_{i_1f(x)}{}')^{-1}=h_{i_1i_2}{}'(f(x)),\qquad x\in U_{i_1}\cap U_{i_2}$$

となる．

この式から，$h_{i_1i_2}(x)$は F_{i_1} から F_{i_2} への線型同相写像で，これによって定まる写像 $h_{i_1i_2}:U_{i_1}\cap U_{i_2}\to\mathcal{L}(F_{i_1};F_{i_2})$は，つぎの写像の合成である．

$$U_{i_1}\cap U_{i_2}=f^{-1}(U_{i_1}')\cap f^{-1}(U_{i_2}')\xrightarrow{f}U_{i_1}'\cap U_{i_2}'$$
$$\xrightarrow{h_{i_1i_2}'}\mathcal{L}(F_{i_1}';F_{i_2}')=\mathcal{L}(F_{i_1};F_{i_2})$$

ここで，f も $h_{i_1i_2}'$ も C^r 級だから，$h_{i_1i_2}$ は C^r 級となる．以上から，命題3を適用して，$f^*\xi'=(E,B,\pi)$は C^r ベクトル束となる．

いま，$\bar{f}:f^*E'\to E'$ を $\bar{f}(x,v)=v$, $(x,v)\in f^*E'$ と定義すると，f^*E' の定義から，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} E=f^*E' & \xrightarrow{\bar{f}} & E' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

そして，$\bar{f}$ が点 $x\in B$ の上のファイバー E_x から $f(x)$ の上のファイバー $E_{f(x)}'$ へひき起こす写像 $\bar{f}_x : E_x \to E_{f(x)}'$ は，E_x と $E_{f(x)}'$ を上のように同一視したとき，恒等写像となる．

このことから，命題4が適用でき，$(\bar{f}, f)$は C^r 束準同型写像となる．そして，$\bar{f}_x$ が線型同相写像だから，これは C^r 束写像である．

以上のようにして定まるベクトル束 $f^*\xi'$ を，**C^r ベクトル束 ξ' から C^r 写像 $f: B\to B'$ によってひき起こされる C^r ベクトル束**という．

例 6　$\xi'=(E', B', \pi')$を C^r ベクトル束とする．いま，B を B' の部分多様体，$i: B\to B'$ を包含写像とする．すると，ξ' から i によってひき起こされる C^r ベクトル束 $i^*\xi'$ は，ξ' を B に制限した C^r ベクトル束 $\xi'|B$ と C^r 束同値となることがわかる．証明は省略する．

例 7　M, N を C^r 多様体，$f: M\to N$ を C^r 写像とする．このとき f の点 $x\in M$ における微分 $T_xf: T_x(M)\to T_{f(x)}(N)$は，写像 $Tf: T(M)=\bigcup_{x\in M} T_x(M) \to T(N)=\bigcup_{y\in N} T_y(N)$をひき起こす．この Tf を f の微分という．このとき，(Tf, f)は，M の接ベクトル束 $\tau(M)$から N の接ベクトル束 $\tau(N)$への C^{r-1} 束準同型写像となることを証明しよう．

$f: M\to N$ は C^r 級だから，x_0 および $f(x_0)$の適当な C^r 座標近傍(U, α)，(V, β)があって，$f(U)\subset V$ で $\beta f\alpha^{-1}: \alpha(U)\to\beta(V)$は C^r 級となる．

一方，接ベクトル束の定義から，E_α を α に対する Banach 空間，${\varphi_x}^{(\alpha)}: E_\alpha \to T_x(M)$を§1の線型同相写像とし，$h_\alpha: \pi^{-1}(U)=\bigcup_{x\in U} T_x(M)\to U\times E_\alpha$ を $h_\alpha(v)=(x, \{{\varphi_x}^{(\alpha)}\}^{-1}(v))$，$x\in U_\alpha$，$v\in T_x(M)$と定義すると，$(U, E_\alpha, h_\alpha)$は $\tau(M)$の C^r 束座標近傍となる．

同様に，F_β を β に対する Banach 空間，${\varphi_y}^{(\beta)}: F_\beta\to T_y(N)$を§1の線型同相写像とし，$k_\beta: \pi^{-1}(V)=\bigcup_{y\in V} T_y(N)\to V\times F_\beta$ を $k_\beta(w)=(y, \{{\varphi_y}^{(\beta)}\}^{-1}(w))$,

$y\in V$, $w\in T_y(N)$ と定義すると，(V, F_β, k_β) は $\tau(N)$ の C^r 束座標近傍である．

$x\in U$ に対して $g(x)=k_{\beta f(x)}T_xfh_{\alpha x}{}^{-1}: E_\alpha\to F_\beta$ とおくと，

$$g(x)=\{\varphi_{f(x)}{}^{(\beta)}\}^{-1}T_xf\varphi_x{}^{(\alpha)}=D(\beta f\alpha^{-1})(\alpha(x))$$

となる．ところが，$\beta f\alpha^{-1}$ は C^r 級だから，$g: U\to\mathcal{L}(E_\alpha; F_\beta)$ は C^{r-1} 級である．

以上から，命題4によって，(Tf, f) が C^{r-1} 束準同型写像であることがわかる．

例 8　M, N を C^r 多様体とし，$f: M\to N$ を C^r 微分同相写像とすると，(Tf, f) は $\tau(M)$ から $\tau(N)$ への C^{r-1} 束同型写像である．これは例7と定義からすぐわかる．

最後に，部分ベクトル束，Whitney 和などについて定義しよう．

$\xi=(E, B, \pi)$ を C^r ベクトル束，E' を E の部分多様体とする．いま，B の各点 x に対して，x を含む ξ の適当な C^r 束座標近傍(U, F, h)と F の位相直和分解 $F=F_1\oplus F_2=F_1\times F_2$ があって，$h: \pi^{-1}(U)\to U\times F$ は $\pi^{-1}(U)\cap E'$ から $U\times F_1\times\{0\}$ への C^r 微分同相写像 $h': \pi^{-1}(U)\cap E'\to U\times F_1\times\{0\}=U\times F_1$ をひき起こすものとする．

このとき，上のようなものの組$(U\cap E', F_1, h')$全体の集合が，$\xi'=(E', B, \pi|E')$ の C^r 束座標近傍系となることを証明しよう．

いま，$\pi'=\pi|E': E'\to B$ とおくと，上の条件から，π' は全射でかつ C^r 級となる．そして，点 $x\in B$ 上のファイバー $E_x'=\pi'^{-1}(x)$ は，線型同相写像 $h_x: E_x\to F=F_1\times F_2$ によって，F_1 に対応する E_x の部分ベクトル空間である．したがって，E_x の位相直和因子であって，Banach 空間の構造をもつ．そして$(U\cap E', F_1, h')$ が ξ' の束座標近傍となることは，定義から明らかである．

いま，点 $x_0\in B$ を含む上のような ξ の C^r 束座標近傍を(U, F, h), (V, G, k)とし，$F=F_1\times F_2$, $G=G_1\times G_2$ を上の条件をみたす F, G の位相直和分解とする．そして，

$$h': \pi^{-1}(U)\cap E'\to U\times F_1,\qquad k': \pi^{-1}(V)\cap E'\to V\times G_1$$

をそれぞれのひき起こす C^r 微分同相写像とする．

いま，$x \in U \cap V$ に対して，$g(x) = k_x h_x^{-1} : F \to G$，$g'(x) = k_x' h_x'^{-1} : F_1 \to G_1$ とすると，これらは線型同相写像で，これらによって定義される写像を $g : U \cap V \to \mathcal{L}(F; G)$，$g' : U \cap V \to \mathcal{L}(F_1; G_1)$ とすると，g は C^r 級である．そこで，われわれは g' が C^r 級となることをいえば，証明が終ることになる．

いま，$\mathcal{L}(F; G)$ の部分集合 A を $A = \{L \in \mathcal{L}(F; G);\ L(F_1) \subset G_1\}$ と定義すると，これは $\mathcal{L}(F; G)$ の閉部分ベクトル空間となる．また，$p : A \to \mathcal{L}(F_1; G_1)$ を $p(L) = L|F_1 : F_1 \to G_1$，$L \in A$ で定義すると，p は連続線型である．

仮定から，$g(x) \in A$ で，A は $\mathcal{L}(F; G)$ の閉部分ベクトル空間だから，$\mathcal{L}(F; G)$ の閉部分多様体とも考えられる．いま，g によってひき起こされる写像 $\bar{g} : U \cap V \to A$ を考えると，これは C^r 級である(§2 命題 1)．そして $g' = p\bar{g}$ となるから，g' は C^r 級である．

以上で，$\xi' = (E', B, \pi')$ が C^r ベクトル束の構造をもつことがわかった．この C^r ベクトル束 ξ' を ξ の**部分ベクトル束**という．

このとき，$i : E' \to E$ を包含写像，$1 : B \to B$ を恒等写像とすると，$(i, 1)$ は ξ から ξ' への C^r 束準同型写像である．

例 9　M を C^r 多様体，N をその部分多様体とする．このとき，N の接ベクトル束 $\tau(N)$ は，M の接ベクトル束 $\tau(M)$ を N へ制限した $\tau(M)|N$ の部分ベクトル束となる．この証明は読者に委せることにする．

C^r ベクトル束 $\xi = (E, B, \pi)$ の 2 つの部分ベクトル束 $\xi_1 = (E_1, B, \pi_1)$，$\xi_2 = (E_2, B, \pi_2)$ があって，B の各点 x に対して $E_x = E_{1x} \oplus E_{2x}$ (位相直和)が成立するとき，ξ は ξ_1 と ξ_2 の **Whitney 和**といい，$\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$ で表わすことにする．

例 10　$\xi_1 = (E_1, B_1, \pi_1)$，$\xi_2 = (E_2, B_2, \pi_2)$ を C^r ベクトル束とする．このとき，これらの**直積ベクトル束** $\xi_1 \times \xi_2 = (E_1 \times E_2, B_1 \times B_2, \pi_1 \times \pi_2)$ を，つぎのように定義しよう．

まず，π_1, π_2 が C^r 級で全射だから，$\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ も C^r 級の全射である．そして，点 $(x_1, x_2) \in B_1 \times B_2$ の上のファイバーは

$$\begin{aligned}(E_1 \times E_2)_{(x_1, x_2)} &= (\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(x_1, x_2) = \pi_1^{-1}(x_1) \times \pi_2^{-1}(x_2) \\ &= E_{1x_1} \times E_{2x_2}\end{aligned}$$

となるから，Banach 空間の構造をもつ．

いま，(U, F, h), (V, G, k)をそれぞれ点 $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2$ を含む ξ_1, ξ_2 の C^r 束座標近傍とする．そして，つぎの写像の合成写像を l とする．

$$(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(U \times V) = \pi_1{}^{-1}(U) \times \pi_2{}^{-1}(V) \xrightarrow{h_1 \times h_2} (U \times F) \times (V \times G)$$
$$\xrightarrow{1 \times t \times 1} U \times V \times F \times G$$

ここで，$t: F \times V \to V \times F$ は成分を入れかえる写像で，1 はそれぞれの空間の恒等写像とする．

このようなものの組$(U \times V, F \times G, l)$が，$\xi_1 \times \xi_2$ の束座標近傍となることはすぐわかるが，さらに，このようなもの全体の集合が，$\xi_1 \times \xi_2$ の C^r 束座標近傍系となることも確かめることができる．

例 11　C^r 多様体 B を底空間とする 2 つの C^r ベクトル束を $\xi_1 = (E_1, B, \pi_1)$, $\xi_2 = (E_2, B, \pi_2)$とする．そして，$j: B \to B \times B$ を $j(x) = (x, x)$, $x \in B$ によって定まる C^r 写像(実は C^r 級うめこみ)とする．このとき，$\xi_1 \times \xi_2$ から j によってひき起こされる C^r ベクトル束 $j^*(\xi_1 \times \xi_2)$を，ξ_1 と ξ_2 の**形式的直和**といい，$\xi_1 \widehat{\oplus} \xi_2$ と表わす．

いま，$\xi_1 \widehat{\oplus} \xi_2$ の全空間を $E_1 \oplus E_2$ と表わすと，例 5，例 10 から

$$E_1 \oplus E_2 = \{(x, v_1, v_2) \in B \times E_1 \times E_2;\ \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2) = x\}$$
$$= \bigcup_{x \in B} \{x\} \times E_{1x} \times E_{2x}$$

となる．そして，$\xi_1 \widehat{\oplus} \xi_2$ の射影を $\pi: E_1 \oplus E_2 \to B$ とすると，$\pi(x, v_1, v_2) = x$, $(x, v_1, v_2) \in E_1 \oplus E_2$ となる．

いま，0_x を E_{2x} の零元として，$\tilde{E}_1 = \bigcup_{x \in B} \{x\} \times E_{1x} \times \{0_x\}$ とおくと，$\tilde{\xi}_1 = (\tilde{E}_1, B, \pi | \tilde{E}_1)$は $\xi_1 \widehat{\oplus} \xi_2$ の部分ベクトル束で，ξ_1 と C^r 束同値となることがわかる．また，同様に 0_x を E_{1x} の零元として $\tilde{E}_2 = \bigcup_{x \in B} \{x\} \times \{0_x\} \times E_{2x}$ とおくと，$\tilde{\xi}_2 = (\tilde{E}_2, B, \pi | \tilde{E}_2)$は $\xi_1 \widehat{\oplus} \xi_2$ の部分ベクトル束で，ξ_2 と C^r 束同値である．そして，$\xi_1 \widehat{\oplus} \xi_2 = \tilde{\xi}_1 \oplus \tilde{\xi}_2$ は明らかである．したがって，ξ_1 と $\tilde{\xi}_1$, ξ_2 と $\tilde{\xi}_2$ を自然に同一視すれば，$\xi_1 \widehat{\oplus} \xi_2$ と $\tilde{\xi}_1 \oplus \tilde{\xi}_2 = \xi_1 \oplus \xi_2$ は同一視できる．すなわち，形式的直和と Whitney 和は同一視できる．

§4　1パラメーター変換群

$\xi=(E, B, \pi)$を C^r ベクトル束とする．いま，写像 $s: B\to E$ が $\pi s(x)=x$, $x\in B$ をみたすとき，s を ξ の**断面**という．すなわち，$s: B\to E$ が ξ の断面となるための必要十分条件は，各 $x\in B$ に対して，$s(x)\in E_x=\pi^{-1}(x)$が成立することである．さらに，断面 s が C^r 写像なら，これを **C^r 断面**という．

いま，r, k を 0, 正の整数，または ∞ で，$r\leqq k$ をみたすものとする．すると，C^k 多様体は C^r 多様体と考えられる．また，C^k ベクトル束も C^r ベクトル束と考えることができる．したがって，C^k 多様体の間の C^r 写像とか，C^k ベクトル束の C^r 断面という概念は意味をもつ．

いま，M を C^{r+1} 多様体で，$1\leqq r\leqq\infty$ とする．すると，M の接ベクトル束 $\tau(M)=(T(M), M, \pi)$は C^r ベクトル束となる．

$\tau(M)$の断面 $s: M\to T(M)$を M の**ベクトル場**という．すなわち，M の各点 x で $s(x)\in T_x(M)$となるような写像 $s: M\to T(M)$が M のベクトル場である．これが C^r 級のとき，**C^r ベクトル場**という．

実数の区間 J から M への C^{r+1} 写像 $c: J\to M$ を M の C^{r+1} 曲線という．J が開区間でなければ，C^{r+1} 写像の定義(第6章§1)によって，c は J を含む開区間まで C^{r+1} 級に拡張できる．したがって，必要に応じて，J は開区間としてよい．

J の各点 t に対して，c の t における微分 $T_tc: T_t(J)\to T_{c(t)}(M)$を考える．ここで，$J$ は $\boldsymbol{R}$ の開集合としてよいから，$T_t(J)=\boldsymbol{R}$ と自然に同一視できる．そこで，$c'(t)=T_tc(1)\in T_{c(t)}(M)$を，曲線 c の $t\in J$ における**接ベクトル**という．すると，定義から，$c': J\to T(M)$が C^r 級となる．

$s: M\to T(M)$を C^r ベクトル場とする．いま，M の C^{r+1} 曲線 $c: J\to M$ がつぎの条件(1)をみたすとき，これを s の**積分曲線**という．

(1)　$c'(t)=s(c(t))\in T_{c(t)}(M), \quad t\in J$

そして，さらに，J が 0 を内部に含む区間で

(2)　$c(0)=x_0\in M$

とするとき，c は x_0 を**初期条件**とする s の積分曲線という．

さて，ここで，c が s の積分曲線となるための必要十分条件を局所的に表現してみよう．

c は C^{r+1} 級だから，各 $t_0\in J$ に対して，t_0 を含む開区間 $J_0\subset J$ と $c(t_0)$ を含む M の適当な C^{r+1} 座標近傍系 (U,α) があって，$c(J_0)\subset U$ かつ $\alpha c: J_0\to\alpha(U)$ は C^{r+1} 級となる．いま，$i: J\to \boldsymbol{R}$ を包含写像，E を α に対する Banach 空間とすると，各 $t\in J_0$ に対して，つぎの図は可換である．

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} \boldsymbol{R} & \xrightarrow{\varphi_t{}^{(i)}} & T_t(J) \\ {\scriptstyle D(\alpha c)(t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_t c} \\ E & \xrightarrow{\varphi_{c(t)}{}^{(\alpha)}} & T_{c(t)}(M) \end{array}$$

ここで，$\varphi_t{}^{(i)}, \varphi_{c(t)}{}^{(\alpha)}$ は§1で定めた線型同相写像である．そして，$\varphi_t{}^{(i)}(1)=1$，$c'(t)=T_tc(1)$ となることから，(1)を書き直すとつぎの(1)′となる．

$$(1)'\quad D(\alpha c)(t)(1)=\{\varphi_{c(t)}{}^{(\alpha)}\}^{-1}s(c(t))=\{\varphi_{c(t)}{}^{(\alpha)}\}^{-1}s\alpha^{-1}(\alpha c(t)),\qquad t\in J_0$$

一方，§3 例3から，$x\in U$，$v\in T_x(M)$ に対して，$h(v)=(x,\{\varphi_x{}^{(\alpha)}\}^{-1}(v))\in U\times E$ とおくと，これは写像 $h:\pi^{-1}(U)=\bigcup_{x\in U}T_x(M)\to U\times E$ を定めるが，$(\pi^{-1}(U), (\alpha\times 1)h)$ は $T(M)$ の C^r 座標近傍である．

いま，$z\in\alpha(U)$ とすると，$s\alpha^{-1}(z)\in T_{\alpha^{-1}(z)}(M)$ であるから

$$\begin{aligned}(\alpha\times 1)hs\alpha^{-1}(z)&=(\alpha\times 1)(\alpha^{-1}(z),\{\varphi_{\alpha^{-1}(z)}{}^{(\alpha)}\}^{-1}(s\alpha^{-1}(z)))\\ &=(z,\{\varphi_{\alpha^{-1}(z)}{}^{(\alpha)}\}^{-1}(s\alpha^{-1}(z)))\end{aligned}$$

となる．したがって，s が C^r 級なら，$z\in\alpha(U)$ に対して

$$(4)\quad \bar{s}(z)=\{\varphi_{\alpha^{-1}(z)}{}^{(\alpha)}\}^{-1}(s\alpha^{-1}(z))$$

を対応させる写像 $\bar{s}:\alpha(U)\to E$ は C^r 級となる．

そして，(1)′は $\alpha(U)$ の曲線 αc が第6章§4の意味で，$\alpha(U)$ の C^r ベクトル場 $\bar{s}$ の積分曲線であることを示している．

以上から，第6章§4の定理1, 2を用いて，つぎの命題1を得る．

命題 1　M を C^{r+1} 多様体，$s: M\to T(M)$ を C^r ベクトル場とする $(1\leqq r\leqq\infty)$．このとき，M の各点 x_0 に対して，適当な近傍 V および正数 δ が存在

して，$I=[-\delta, \delta]$ とおくと，つぎの条件(＊)をみたす写像 $\phi: I\times V\to M$ が，ただ1つ存在する．

(＊) V の各点 x に対して $\phi^x: I\to M$ を $\phi^x(t)=\phi(t, x)$，$t\in I$ とおくと，ϕ^x は初期条件を x とする s の積分曲線である．

さらに，各 $t\in I$ に対して，$\phi_t: V\to M$ を $\phi_t(x)=\phi(t, x)$，$x\in V$ とおくと，ϕ_t は C_r 級である．

また，$\phi: I\times V\to M$ は C^r 級である．

証明 (U, α)を点 x_0 を含む M の C^{r+1} 座標近傍とし，$\bar{s}$ を上の(4)式で定義される $\alpha(U)$上の C^r ベクトル場とする．いま，$\alpha(x_0)$を中心とする半径 b, b', $(0<b<b'<\infty)$の開球を B, B' とする．そして b' を小さくとって $B'\subset\alpha(U)$ で，$D\bar{s}$ が B' 上で有界となるようにする．すると，第6章§2補題1から，$\bar{s}$ は Lipschitz 写像となる．

したがって，第6章§4定理1, 2が適用できて，適当な正数 δ に対して，$I=[-\delta, \delta]$ とすると，つぎの条件$(＊)'$ をみたす写像 $\psi: I\times B\to B'$ がただ1つ存在する．

$(＊)'$ B の各点 y に対して $\psi^y: I\to B'$ を $\psi^y(f)=\psi(t, y)$，$t\in I$ とおくと，ψ^y は初期条件を y とするベクトル場 $\bar{s}$ の積分曲線である．

そして，各 t に対して，$\psi_t: B\to B'$ を $\psi_t(y)=\psi(t, y)$，$y\in B$ と定義すると ψ_t は C^r 級である．また，さらに，ψ 自身 C^r 級である．

いま，$V=\alpha^{-1}(B)$とし，$\phi: I\times V\to M$ を $\phi(t, x)=\alpha^{-1}\psi(t, \alpha(x))$とおくと，これが命題の条件をみたすことはすぐわかる．▌

命題 2 s を M の C^r ベクトル場とする．いま，J_1, J_2 を0を含む開区間とし，M の C^{r+1} 曲線 $c_1: J_1\to M$，$c_2: J_2\to M$ は $x_0\in M$ を初期条件とする s の積分曲線とする．このとき，c_1 と c_2 はその共通の定義域 $J_1\cap J_2$ の上で一致する．

証明 $J^*=\{t\in J_1\cap J_2;\ c_1(t)=c_2(t)\}$ とする．すると命題1から，J^* は0の近傍を含む．したがって空でない．

つぎに，$\varDelta$ を $M\times M$ の対角線集合，すなわち $\varDelta=\{(x, x);\ x\in M\}$ とする

と，§2例2から，これは閉集合である．そして，$(c_1, c_2): J_1 \cap J_2 \to M \times M$ を $(c_1, c_2)(t) = (c_1(t), c_2(t))$，$t \in J_1 \cap J_2$ とおくと，これは C^{r+1} 級．したがって連続である．そして，$J^* = (c_1, c_2)^{-1}(\Delta)$ であるから，J^* は $J_1 \cap J_2$ の閉集合である(第2章§3定理1).

つぎに，$t^* \in J^*$ とする．すると，$c_1(t^*) = c_2(t^*)$ となる．そして，$d_1(t) = c_1(t^* + t)$，$d_2(t) = c_2(t^* + t)$，$J_1{}^* = \{t;\ t^* + t \in J_1\}$，$J_2{}^* = \{t;\ t^* + t \in J_2\}$ とおくと，$J_1{}^*, J_2{}^*$ は0をふくむ開区間であって，§1命題6(または鎖法則)から，$T_t d_i = T_{t^*+t} c_i$，$i=1, 2$ となる．

以上から，$d_1: J_1{}^* \to M$，$d_2: J_2{}^* \to M$ は初期条件が $c_1(t^*) = c_2(t^*)$ である s の積分曲線であることがわかる．したがって，命題1によって，0の近傍で d_1 と d_2 は一致する．すなわち c_1 と c_2 は t^* の近傍で一致する．

このことから，J^* は t^* の近傍を含むことがわかった．したがって，J^* は $J_1 \cap J_2$ の開集合である．すなわち，J^* は $J_1 \cap J_2$ の閉かつ開集合となる．

一方，$J_1 \cap J_2$ は明らかに開区間であり，したがって連結である．ゆえに，$J^* = J_1 \cap J_2$. ∎

M の C^r ベクトル場を s とし，$x_0 \in M$ を初期条件とする s の積分曲線 $c_\alpha: J_\alpha \to M$ (J_α は0を含む開区間)全体の集合を考える．そして，$J_{x_0} = \bigcup_\alpha J_\alpha$ とおく．いま，

$$t_+(x_0) = \sup J_{x_0},$$
$$t_-(x_0) = \inf J_{x_0}$$

とおくと，$J_{x_0} = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ となる．ここで，$t_+(x_0) = \infty$，$t_-(x_0) = -\infty$ も許すものとする．

いま，$t \in J_{x_0} = \bigcup_\alpha J_\alpha$ に対し，$t \in J_\alpha$ となる J_α をとり，$\tilde{c}(t) = c_\alpha(t)$ と定義すると，命題2から，この $\tilde{c}(t)$ は，このような J_α のとり方に無関係であることがわかる．そして，定義から，$\tilde{c}: J_{x_0} \to M$ は x_0 を初期条件とする s の C^{r+1} 積分曲線である．また，0を含む開区間で定義された，x_0 を初期条件とする s の任意の積分曲線は，この $\tilde{c}$ の制限である．

さらに，0を内部にふくむ任意の区間で定義された，x_0 を初期条件とする s

の任意の積分曲線も，この $\tilde{c}$ の制限であることが，命題1をもちいて証明できる．

この区間 J_{x_0} を，**初期条件 x_0 に対する s の積分曲線の最大存在区間**という．

命題 3　上の仮定と記号のもとで，さらに M がコンパクトなら，M の各点 x_0 に対して $J_{x_0}=\boldsymbol{R}$ である．

証明　いま，ある点 $x_0\in M$ に対して $t_+(x_0)<\infty$ とする．J_{x_0} の数列 $\{t_n\}$ を，$n\to\infty$ のとき $t_n\to t_+(x_0)$ となるようにとる．M はコンパクトだから，つぎの補題1によって，M は距離空間と考えてよい．したがって，第2章§6定理6から，M の点列 $\{\tilde{c}(t_n)\}$ は収束する部分列 $\{\tilde{c}(t_{n_k})\}$ をもつ．いま，$k\to\infty$ のとき $\tilde{c}(t_{n_k})\to y_0$ とする．命題1から，y_0 の適当な近傍 V と適当な正数 δ があって，$I=[-\delta,\delta]$ とすると，U に属する任意の点 z を初期条件とする s の積分曲線 $d_z:I\to M$ が存在する．

$k\to\infty$ のとき $t_{n_k}\to t_+(x_0)$，$\tilde{c}(t_{n_k})\to y_0$ となることから，十分大きな k に対して $t_+(x_0)-\delta<t_{n_k}<t_+(x_0)$ で，$\tilde{c}(t_{n_k})\in V$ となるようにできる．

いま，$z=\tilde{c}(t_{n_k})$ とすると，$\tilde{c}(t+t_{n_k})$ も $z=\tilde{c}(t_{n_k})$ を初期条件とする s の積分曲線である．したがって，積分曲線の一意性から（命題2），$\tilde{c}(t+t_{n_k})=d_z(t)$ が 0 を含む開区間で成立する．したがって，$d:(t_-(x_0),t_{n_k}+\delta)\to M$ を

$$d(t)=\begin{cases}\tilde{c}(t), & t_-(x_0)<t<t_+(x_0),\\ d_z(t-t_{n_k}), & t_+(x_0)\leqq t<t_{n_k}+\delta\end{cases}$$

と定義すると，これは x_0 を初期条件とする s の積分曲線で，その定義域は J_{x_0} より大きくなる．これは $\tilde{c}:J_{x_0}\to M$ の定義に矛盾する．

以上で，$t_+(x_0)=\infty$ となることがわかった．同様に，$t_-(x_0)=-\infty$ もわかる．∎

ここで，上の命題の証明の中で用いたことを証明しよう．

補題 1　コンパクト多様体は有限次元で第2可算公理をみたす．そして，適当な距離関数を定めて，その自然な位相がもとの位相と一致するようにできる．すなわち，コンパクト多様体は距離空間と考えてよい．

証明　M をコンパクト多様体とする．M の座標近傍系を $\{(U_\alpha,\alpha);\ \alpha\in A\}$

とする．$\{U_\alpha;\ \alpha\in A\}$ は M の開被覆だから，M のコンパクト性によって，適当な $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in A$ があって，$\bigcup_{i=1}^{n}U_{\alpha_i}=M$ となる．

いま α_i に対する Banach 空間を E_i とすると，M はコンパクトだから，U_{α_i} は局所コンパクト．したがって，E_i も局所コンパクトとなる．すると，第4章§2定理6から，E_i は有限次元である．

多様体は Hausdorff 空間だから，コンパクト多様体は，第2章§7定理1によって，正規空間である．したがって，これが第2可算公理をみたすことを示せば，第2章§7定理5によって，この補題が証明されたことになる．

さて，ここで有限次元 Banach 空間 $E=\boldsymbol{R}^m$ の開集合 O は第2可算公理をみたすことを証明しよう．いま，すべての成分が有理数であるような $E=\boldsymbol{R}^m$ の点 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ を有理点ということにする．すると，有理点全体の集合は可算集合である．ゆえに，O に属する有理点を中心として，正の有理数を半径とする O に含まれるような開球全体の集合は可算集合となる．これを $\mathcal{B}=\{B_j;\ j=1,2,\cdots\}$ とする．

すると，$\mathcal{B}$ が O の開集合の基底となることはすぐわかる．すなわち O は第2可算公理をみたす．

U_{α_i} は有限次元 Banach 空間 E_i の開集合と同相だから，第2可算公理をみたす．したがって，U_{α_i} に含まれる開集合の可算個の集合 $\mathcal{B}_i=\{B_{ij};\ j=1,2,\cdots\}$ があって，U_{α_i} に含まれる任意の開集合は $\mathcal{B}_i$ に属する開集合の和集合として表わされる．

いま，$\tilde{\mathcal{B}}=\mathcal{B}_1\cup\cdots\cup\mathcal{B}_n=\{B_{ij};\ i=1,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots\}$ とおくと，これは可算集合で，M の基底となることが簡単に確かめられる．▌

定理 1　M をコンパクトな C^{r+1} 多様体，$s:M\to T(M)$ を M の C^r ベクトル場とする$(1\leqq r\leqq\infty)$．このとき，つぎの性質(1)をみたす写像 $\phi:\boldsymbol{R}\times M\to M$ がただ1つ存在する．

(1)　M の各点 x に対して，$\phi^x:\boldsymbol{R}\to M$ を $\phi^x(t)=\phi(t,x)$，$t\in\boldsymbol{R}$ とおくと，ϕ^x は初期条件を x とする s の C^{r+1} 積分曲線である．

そして，さらに ϕ はつぎの性質(2), (3)をみたす．

(2) 各 $t\in\boldsymbol{R}$ に対し，$\phi_t:M\to M$ を $\phi_t(x)=\phi(t,x)$，$x\in M$ と定義すると，つぎの(a)，(b)が成立する．

(a) $\phi_{t_1}\phi_{t_2}=\phi_{t_1+t_2}$,　$t_1,t_2\in\boldsymbol{R}$

(b) $\phi_0=1$ (M の恒等写像)

(3) $\phi:\boldsymbol{R}\times M\to M$ は C^r 級である．

証明 命題3から，$x\in M$ を初期条件とする s の積分曲線で，その定義域が $\boldsymbol{R}$ となるものが存在する．これを $\phi^x:\boldsymbol{R}\to M$ とする．そして $\phi:\boldsymbol{R}\times M\to M$ を $\phi(t,x)=\phi^x(t)$，$(t,x)\in\boldsymbol{R}\times M$ と定義する．すると(1)が成立し，このような ϕ はただ1つに限る(命題2)．

M の点 x と実数 t_2 に対して，$y=\phi(t_2,x)$，$c(t)=\phi^x(t_2+t)=\phi(t_2+t,x)$，$t\in\boldsymbol{R}$ とおく．すると $c:\boldsymbol{R}\to M$ は初期条件を y とする s の積分曲線である．したがって，$c(t)=\phi^y(t)$，$t\in\boldsymbol{R}$ となる．これを書きなおすと，$\phi(t_2+t,x)=\phi(t,\phi(t_2,x))$，$t\in\boldsymbol{R}$ となる．これから (2)(a)がわかる．

(2)(b)は ϕ^x の初期条件が x であることから明らかである．

最後に，ϕ が C^r 級となることを示す．

命題1から，M の各点 x に対して，適当な x の近傍 V_x と適当な正数 δ_x があって，$I_x=[-\delta_x,\delta_x]$ とおくと，$\phi:I_x\times V_x\to M$ が C^r 級となる．いま，V_x をさらに小さくとって，これが x の開近傍であるとしよう．すると，$\{V_x;x\in M\}$ は M の開被覆となる．M はコンパクトだから，有限個の $V_{x_1},\cdots,V_{x_k}$ が M を覆う．いま，$\delta=\min\{\delta_{x_1},\cdots,\delta_{x_k}\}$ とすると $\delta>0$ で，$I=[-\delta,\delta]$ とおくと，$\phi:I\times M\to M$ は C^r 級となる．すなわち，任意の$(t,x)\in I\times M$ に対して，ϕ は点(t,x)で C^r 級となる．

これから，特に $\phi_t:M\to M$ は $|t|\leqq\delta$ なら C^r 級となることもわかる．

つぎに，一般の点$(t_0,x)\in\boldsymbol{R}\times M$ において ϕ が C^r 級となることをいう．いま $t_0>0$ とする．すると，t_0 は $t_0=l\delta+t'$ (l は零または正の整数，$0\leqq t'<\delta$) の形に表わすことができる．$J=[t_0-\delta,t_0+\delta]$ とおく．

上に証明した(2)(a)から

$$\phi(t, x) = \phi_t(x) = \phi_{(t-l\delta)+l\delta}(x) = \phi_{t-l\delta}\phi_{l\delta}(x)$$
$$= \phi_{t-l\delta}(\phi_\delta)^l(x) = \phi(t-l\delta, (\phi_\delta)^l(x))$$

となる．したがって，$h: J \to I$ を $h(t)=t-l\delta$ とおくと，これは C^∞ 級で，$\phi: J \times M \to M$ はつぎの写像の合成である．

$$J \times M \xrightarrow{h \times (\phi_\delta)^l} I \times M \xrightarrow{\phi} M$$

したがって，$\phi: J \times M \to M$ は C^r 級である．$(t_0, x) \in J \times M$ だから，ϕ が (t_0, x) で C^r 級となることがわかった．

$t_0 < 0$ のときも，これと同様に証明できる．▌

一般に，C^r 写像 $\phi: \boldsymbol{R} \times M \to M$ に対して，$\phi_t: M \to M$ を $\phi_t(x) = \phi(t, x)$，$(t, x) \in \boldsymbol{R} \times M$ と定義する．そして，これがつぎの条件(a), (b)をみたすとき，$\{\phi_t;\ t \in \boldsymbol{R}\}$ を M の **C^r 級1パラメーター変換群**という．

(a)　$\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1}\phi_{t_2}$,　　$t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$

(b)　$\phi_0 = 1$（恒等写像）

このとき，$\phi_t\phi_{-t} = \phi_{-t}\phi_t = \phi_0 = 1$ となることから，ϕ_t は全単射で，$(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ がわかる．また，任意の $t' \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\phi_{t'}$ が C^r 級となることから，ϕ_t が実は C^r 微分同相写像となることがわかる．

系　定理1と同じ仮定と記号のもとに，$\{\phi_t;\ t \in \boldsymbol{R}\}$ は M の C^r 級1パラメーター変換群である．特に，$\phi_t: M \to M$，$t \in \boldsymbol{R}$ は C^r 微分同相写像で，$(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ となる．

このように，M 上の C^r ベクトル場 s から定まる M の C^r 級1パラメーター変換群 $\{\phi_t;\ t \in \boldsymbol{R}\}$ を，**ベクトル場 s によって生成される M の1パラメーター変換群**という．

逆に M の1パラメーター変換群 $\{\phi_t;\ t \in \boldsymbol{R}\}$ が与えられたとき，M の各点 x に対して，$\phi^x: \boldsymbol{R} \to M$ を $\phi^x(t) = \phi_t(x) = \phi(t, x)$，$t \in \boldsymbol{R}$ と定義する．そして，$x \in M$ に対して ϕ^x の原点における接ベクトル $(\phi^x)'(0) \in T_x(M)$ を対応させるベクトル場を $s: M \to T(M)$ とすると，この s は初めに与えた1パラメーター変換群 $\{\phi_t;\ t \in \boldsymbol{R}\}$ を生成することがわかる．

§5 力　学　系

集合 G が位相空間の構造と群の構造をもち，これら2つの構造が両立するとき，これを**位相群**という．すなわち，積によって定まる写像

$$\mu: G\times G\to G,\quad \mu(g_1, g_2)=g_1g_2,\quad (g_1, g_2)\in G\times G$$

および，逆元をとることによって定まる写像

$$\lambda: G\to G,\quad \lambda(g)=g^{-1},\quad g\in G$$

が，ともに連続のとき，G を位相群という．

特に，G が C^r 多様体で，上の μ, λ がともに C^r 級のとき，G を **C^r 級のリー群**という．そして，G が n 次元多様体のとき，G を **n 次元の C^r 級リー群**という．

例 1　実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ は加法に関して群をなす．$\boldsymbol{R}$ は1次元 Banach 空間として，C^∞ 多様体であるが，加法によって定まる写像

$$\mu: \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad \mu(x, y)=x+y,\quad (x, y)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$$

および逆元をとる写像

$$\lambda: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\quad \lambda(x)=-x,\quad x\in\boldsymbol{R}$$

は，それぞれ連続2重線型写像および連続線型写像である．したがって C^∞ 級である．以上で，$\boldsymbol{R}$ が1次元 C^∞ 級リー群であることがわかった．

例 2　$\boldsymbol{Z}$ を整数全体の集合とすると，これも加法によって群をなす．$\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ の部分空間として離散空間である．したがって，0次元 C^∞ 多様体と考えられる．また，加法によって定義される写像や，逆元をとることによって定義される写像が C^∞ 級であることはすぐわかるから，$\boldsymbol{Z}$ は0次元 C^∞ 級リー群である．

例 3　E を Banach 空間とする．E から E への線型同相写像全体の集合 $\mathrm{GL}(E)=\mathrm{Iso}(E;E)$ は Banach 空間 $\mathscr{L}(E;E)$ の開集合である(第4章§1命題12)．したがって，C^∞ 多様体である．

2つの線型同相写像の合成はまた線型同相写像だから，$\mathrm{GL}(E)$ の2つの元 L_1, L_2 に対して，その合成 L_1L_2 は $\mathrm{GL}(E)$ に属する．そこでこれを $\mathrm{GL}(E)$

の積と定義する.

この積が結合法則をみたすことは明らかで，E の恒等写像 1 は $\mathrm{GL}(E)$に属し，これが，この積に関して $\mathrm{GL}(E)$ の単位元となる．また，線型同相写像の逆写像は線型同相写像だから，$L \in \mathrm{GL}(E)$に対して，その逆写像 L^{-1} は $\mathrm{GL}(E)$に属し，これが L の逆元となる.

以上で $\mathrm{GL}(E)$は群の構造をもつことがわかったが，積によって定義される写像 $\mu:\mathrm{GL}(E)\times\mathrm{GL}(E)\to\mathrm{GL}(E)$は，連続2重線型写像 $\mathrm{comp}:\mathcal{L}(E;E)\times\mathcal{L}(E;E)\to\mathcal{L}(E;E)$の制限である．したがって C^∞ 級である．さらに，逆元をとることによって定まる写像 $\lambda:\mathrm{GL}(E)\to\mathrm{GL}(E)$は，第5章§3命題5から，$C^\infty$ 級である.

以上で $\mathrm{GL}(E)$が C^∞ 級リー群となることがわかった.

E が有限次元，すなわち $E=\boldsymbol{R}^n$ のとき，$\mathrm{GL}(E)=\mathrm{GL}(n,\boldsymbol{R})$は n^2 次元の C^∞ 級リー群である.

G を位相群，M を位相空間とする．いま，$\phi:G\times M\to M$ を連続写像とし，各 $g\in G$ に対して，$\phi_g:M\to M$ を $\phi_g(x)=\phi(g,x)$，$x\in M$ と定義する．これがつぎの2つの条件をみたすとき，ϕ は **G の M への作用**であるという.

(a) $\phi_{g_1g_2}=\phi_{g_1}\phi_{g_2}$, $\quad g_1,g_2\in G$

(b) $\phi_e=1$，ここで e は G の単位元，1 は M の恒等写像である.

さて，このとき，各 $g\in G$ に対して，$\phi_g\phi_{g^{-1}}=\phi_{g^{-1}}\phi_g=\phi_e=1$ となるから，ϕ_g は全単射で，その逆写像 $(\phi_g)^{-1}$ は $\phi_{g^{-1}}$ と一致することがわかる．さらに，ϕ_g, $\phi_{g^{-1}}$ はともに連続だから，ϕ_g は同相写像である.

上の定義で，G が C^r 級リー群，M が C^r 多様体とし，さらに，$\phi:G\times M\to M$ が C^r 級のとき，ϕ を **G の M への C^r 作用**という.

このとき，各 $g\in G$ に対して $\phi_g:M\to M$ は C^r 微分同相写像となる.

$\phi:G\times M\to M$ を位相群 G の位相空間 M への作用とする．いま，M の2点 x, y に対して適当な G の元 g があって $y=\phi_g(x)=\phi(g,x)$となるとき，$x\sim y$ と定義する．すると，これは M の同値関係である.

なぜならば，$x=\phi_e(x)$から $x\sim x$ である．$x\sim y$ とすると，$y=\phi_g(x)$ とな

る $g\in G$ が存在する．$(\phi_g)^{-1}=\phi_{g^{-1}}$ に注意すると，これから $x=(\phi_g)^{-1}(y)=\phi_{g^{-1}}(y)$．すなわち $y\sim x$ となる．

最後に $x\sim y$，$y\sim z$ とすると，$y=\phi_{g_1}(x)$，$z=\phi_{g_2}(y)$ となる $g_1, g_2\in G$ が存在する．したがって，$z=\phi_{g_2}(y)=\phi_{g_2}(\phi_{g_1}(x))=\phi_{g_2g_1}(x)$．すなわち，$x\sim z$ となる．これで証明された．

さて，この同値関係 $x\sim y$ による同値類を ϕ の**軌道**という．いま，$x\in M$ に対して，$\phi^x: G\to M$ を $\phi^x(g)=\phi(g,x)$，$g\in G$ とおくと，定義から，x を含む ϕ の軌道は，この ϕ^x の像 $\{\phi^x(g)=\phi(g,x);\ g\in G\}$ と一致する．

ϕ を固定したとき，x を含む ϕ の軌道を $\mathrm{Orb}(x)$ で表わし，x を通る軌道という．

$r\geqq 1$ とし，$G=\boldsymbol{R}$ または $G=\boldsymbol{Z}$ の C^r 多様体 M への C^r 作用を，M の上の C^r **級**(または**微分可能な**)**力学系**という．$G=\boldsymbol{R}$ のときと，$G=\boldsymbol{Z}$ のときを区別したいときは，$G=\boldsymbol{R}$ のときを**連続力学系**，$G=\boldsymbol{Z}$ のときを**離散力学系**という．

この定義にしたがえば，C^r 多様体 M の C^r 級1パラメーター変換群は，M の上の C^r 級力学系である．また，C^{r+1} 多様体 M の C^r ベクトル場 s は，M の上の C^r 級力学系を生成する(§4定理1系)．したがって，M の上の C^r ベクトル場を M の C^r **級力学系**ということもある．このとき，この力学系の軌道は，このベクトル場 s の積分曲線と一致する．

さて，Poincaré, Birkhoff 以来，常微分方程式の定性的理論という名前で発展して来た理論は，その後，位相力学とか微分可能な力学系の理論などの形で結実しつつあるが，これらの理論は，ここで定義した力学系の軌道の大域的な状態を位相的に研究するものである．

(I)　$G=\boldsymbol{R}$ の場合

まず，1つの軌道の状態について考察しよう．

簡単のため，M を距離空間とし，$\phi: \boldsymbol{R}\times M\to M$ を M の上の(位相)力学系とする．

M の点 x_0 を通る軌道 $\mathrm{Orb}(x_0)$ は，連続写像 $\phi^{x_0}: \boldsymbol{R}\to M$ の像である．すな

わち，$\mathrm{Orb}\,(x_0)=\{\phi^{x_0}(t)=\phi(t,x_0)\,;\ t\in\boldsymbol{R}\}$ である．いま $P=\{t\in\boldsymbol{R};\ \phi(t,x_0)=\phi_t(x_0)=x_0\}$ とおくと，P は $\boldsymbol{R}$ の部分群となる．すなわち，つぎの3つの性質が成立する．

(1)　$0\in P$

(2)　$t_1\in P,\ t_2\in P \longrightarrow t_1+t_2\in P$

(3)　$t\in P \longrightarrow -t\in P$

なぜならば，$\phi_0(x_0)=x_0$ から(1)がでる．また，$t_1, t_2\in P$ とすると $\phi_{t_1+t_2}(x_0)=\phi_{t_1}\phi_{t_2}(x_0)=\phi_{t_1}(x_0)=x_0$ となる．したがって，$t_1+t_2\in P$，すなわち(2)が成立する．最後に，$t\in P$ とすると $\phi_t(x_0)=x_0$ となる．しかるに，$\phi_{-t}(x_0)=\{\phi_t\}^{-1}(x_0)=x_0$ となるから，$-t\in P$ となる．これで証明された．

つぎに，P は $\boldsymbol{R}$ の閉集合となる．

なぜならば，$\{t_n\}$ を P の点列とし，$n\to\infty$ のとき $t_n\to t_0$ となるなら，$t_0\in P$ となることをいえば十分である(第2章§2命題4)．仮定から $\phi(t_n,x_0)=x_0$ となるが，ϕ は連続だから，$x_0=\lim\limits_{n\to\infty}\phi(t_n,x_0)=\phi(\lim\limits_{n\to\infty}(t_n,x_0))=\phi(t_0,x_0)$ となる．すなわち，$t_0\in P$ である．これで証明された．

$y\in\mathrm{Orb}\,(x_0)$ とすると，任意の $t^*\in P$ に対して

$$\phi(t+t^*,y)=\phi(t,y),\qquad t\in\boldsymbol{R}$$

が成立する．

また逆に，ある t, t^* に対して上の式が成り立てば，$t^*\in P$ となる．

なぜならば，仮定から，適当な実数 t_1 に対して，$y=\phi_{t_1}(x_0)$ となる．したがって，$t^*\in P$ とすると

$$\begin{aligned}\phi(t+t^*,y)&=\phi_{t+t^*}(y)=\phi_{t+t^*}\phi_{t_1}(x_0)=\phi_{t+t^*+t_1}(x_0)\\&=\phi_t\phi_{t_1}\phi_{t^*}(x_0)=\phi_t\phi_{t_1}(x_0)=\phi_t(y)=\phi(t,y)\end{aligned}$$

となる．

逆に，$\phi(t+t^*,y)=\phi(t,y)$ とする．上と同様な計算を行なって，

$$\phi(t+t^*,y)=\phi_{t+t_1}\phi_{t^*}(x_0),\qquad \phi(t,y)=\phi_{t+t_1}(x_0)$$

を得る．したがって，$\phi_{t+t_1}\phi_{t^*}(x_0)=\phi_{t+t_1}(x_0)$ となる．しかるに，$\phi_{t+t_1}:M\to M$ は同相写像だから，その逆写像を上式の両辺にほどこして $\phi_{t^*}(x_0)=x_0$ を得る．

すなわち，$t^* \in P$ である．これで証明された．

いま，$\boldsymbol{R}$ の部分群 P に対して，$P=\{0\}$ のときと，$P \neq \{0\}$ のときに分けて考察しよう．

（イ）　$P=\{0\}$ とすると，$\phi^{x_0}: \boldsymbol{R} \to M$ は単射である．すなわち，x_0 を通る軌道は，$\boldsymbol{R}$ からの連続な単射の像である．

これを証明しよう．$\phi^{x_0}(t_1)=\phi^{x_0}(t_2)$，$t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$ とする．この式を書き直すと $\phi_{t_1}(x_0)=\phi_{t_2}(x_0)$ となる．したがって

$$\phi_{t_1-t_2}(x_0) = \phi_{-t_2}\phi_{t_1}(x_0) = \{\phi_{t_2}\}^{-1}\phi_{t_1}(x_0) = x_0$$

となる．すなわち，$t_1-t_2 \in P$ となる．$P=\{0\}$ だから，$t_1=t_2$ となる．これで証明された．

$P \neq \{0\}$ とする．いま，$t_0=\inf\{t \in P;\ t>0\}$ とおく．$P \neq \{0\}$ だから，零でない P の元 t がある．$t \in P$ なら，$-t \in P$ となることから，$\{t \in P;\ t>0\}$ は空集合ではない．したがって，t_0 は零または正数として確定する．

定義から，任意の自然数 n に対して，$t_0 \leqq t_n < t_0+1/n$ かつ $t_n>0$ をみたす P の元 t_n が存在する．したがって，$n \to \infty$ として $t_n \to t_0$ となる．P は閉集合だから，$t_0 \in P$ となる．そこで，$t_0>0$ のときと $t_0=0$ の 2 つの場合について考察しよう．

（ロ）　$t_0>0$ のとき，$P=\{nt_0;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$ となる．そして，$\phi^{x_0}: \boldsymbol{R} \to M$ の像，すなわち x_0 を通る軌道 $\mathrm{Orb}(x_0)$，はコンパクトで，$\phi^{x_0}|[0, t_0): [0, t_0) \to M$ は，$[0, t_0)$ から $\mathrm{Orb}(x_0)$ への全単射である．

このような軌道を**周期軌道**といい，P の元をその**周期**，t_0 をその**最小周期**という．

上のことを証明しよう．$t_0 \in P$ で，P が $\boldsymbol{R}$ の部分加群であることから，その条件(1), (2), (3)を用いると，帰納的に，すべての整数 n に対して $nt_0 \in P$ がわかる．すなわち $P \supset \{nt_0;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$ である．したがって，$P \subset \{nt_0;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$ をいえばよい．

$t \in P$ とする．すると，適当な整数 n をとると，t は

$$t = nt_0+t', \qquad 0 \leqq t' < t_0$$

の形に表わすことができる．P は $\boldsymbol{R}$ の部分加群で，$nt_0 \in P$ だから，条件(2)，(3)を用いて，$t'=t-nt_0 \in P$ がわかる．

$0 \leqq t' < t_0$ だから，t_0 の定義により，$t'=0$ でなければならない．すなわち，$t=nt_0$ である．

以上で $P=\{nt_0;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$ がわかった．

つぎに，$y \in \mathrm{Orb}(x_0)$ とすると，$y=\phi_t(x_0)$，$t \in \boldsymbol{R}$ と書ける．いま，適当な整数 n を用いて $t=nt_0+t'$，$0 \leqq t' < t_0$ と表わすと，$y=\phi(t, x_0)=\phi(t'+nt_0, x_0)=\phi(t', x_0)$ となる．したがって，$\mathrm{Orb}\,(x_0)=\phi^{x_0}(\boldsymbol{R}) \subset \phi^{x_0}([0, t_0)) \subset \phi^{x_0}([0, t_0])$ となる．すなわち，$\mathrm{Orb}\,(x_0)=\phi^{x_0}([0, t_0))=\phi^{x_0}([0, t_0])$ となる．$[0, t_0]$ はコンパクトで，ϕ^{x_0} は連続だから，$\phi^{x_0}([0, t_0])=\mathrm{Orb}\,(x_0)$ はコンパクトである．

つぎに $\phi^{x_0}(t_1)=\phi^{x_0}(t_2)$，$0 \leqq t_1 \leqq t_2 < t_0$ とする．すると，上の式から $\phi_{t_2-t_1}(x_0)=x_0$ を得る．すなわち，$t_2-t_1 \in P$ となる．しかるに，$0 \leqq t_2-t_1 < t_0$ だから，t_0 の定義により，$t_2-t_1=0$，すなわち $t_2=t_1$ となる．

以上で $\phi^{x_0}|[0, t_0) : [0, t_0) \to \mathrm{Orb}\,(x_0)$ が全単射となることがわかった．これで証明された．

(ハ)　最後に，$t_0=0$ とすると $P=\boldsymbol{R}$ となる．したがって，x_0 を通る軌道は，一点 x_0 だけからなる集合である．

このような x_0 を ϕ の**特異点**という．

上のことを証明しよう．$t_0=0$ だから，初めに注意したように，任意の自然数 n に対して $0 < t_n < 1/n$ となる P の元 t_n が存在する．そして，P が $\boldsymbol{R}$ の部分加群となることから，つぎの集合 $A=\{mt_n;\ n=1, 2, \cdots, m \in \boldsymbol{Z}\}$ は P に含まれる．

A の定義と $0 < t_n < 1/n$ を用いると，任意の実数は A に属する実数で，いくらでも近く近似できることがわかる．すなわち A は $\boldsymbol{R}$ で稠密となる(A の閉包 $\bar{A}$ は $\boldsymbol{R}$ と一致する)．$A \subset P$ で P は閉集合だから，第2章§2定理2によって $\bar{A} \subset P$ となる．しかるに，$\bar{A}=\boldsymbol{R}$ だから，これと合わせて $P=\boldsymbol{R}$ を得る．

$P=\boldsymbol{R}$ だから，定義によって，任意の実数 t に対して $\phi^{x_0}(t)=\phi(t, x_0)=x_0$ となる．すなわち，$\mathrm{Orb}\,(x_0)=\{x_0\}$ である．これで証明された．

以上で1つの軌道について，上の3つの状態(イ)，(ロ)，(ハ)のどれか1つだけが起こることがわかった．

つぎに，$t\to+\infty$，または $t\to-\infty$ としたときの x_0 を通る軌道 $\phi^{x_0}: \boldsymbol{R}\to M$ の状態をもう少し詳しく考察するために，重要な概念である ω 極限点，ω 極限集合，α 極限点，α 極限集合，遊走点，非遊走点などについて説明しよう．

いま，M の点 y にたいして，無限大に発散する数列 $\{t_n\}$ があって，$y=\lim_{n\to\infty}\phi^{x_0}(t_n)=\lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0)$ となるとき，y を x_0 の **$\boldsymbol{\omega}$ 極限点**いう．x_0 の ω 極限点全体の集合を，x_0 の **$\boldsymbol{\omega}$ 極限集合**といい，$\omega\lim(x_0)$ で表わす．

上の定義で，$\{t_n\}$ が無限大に発散する数列とする代りに，負の無限大に発散するということにして，x_0 の **$\boldsymbol{\alpha}$ 極限点**とか x_0 の **$\boldsymbol{\alpha}$ 極限集合** $\alpha\lim(x_0)$ などが，同様に定義される．

定義から，x_0 が特異点なら $\omega\lim(x_0)=\alpha\lim(x_0)=\{x_0\}$ となることがわかる．また，x_0 を通る軌道 $\mathrm{Orb}(x_0)$ が周期軌道なら，$\alpha\lim(x_0)=\omega\lim(x_0)=\mathrm{Orb}(x_0)$ となる．

命題 1　$\omega\lim(x_0)=\bigcap_{0\leqq s<\infty}\overline{\phi^{x_0}([s,\infty))}$,

$$\alpha\lim(x_0)=\bigcap_{-\infty<s\leqq 0}\overline{\phi^{x_0}((-\infty,s])}$$

が成立する．したがって，特に，これらは閉集合である．

証明　$y\in\omega\lim(x_0)$ とする．すると $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ となる数列 $\{t_n\}$ があって，$\lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0)=y$ となる．

$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ から，任意の実数 s, $(s\geqq 0)$ に対して，適当な n_0 をとると，$n\geqq n_0$ なら $t_n\geqq s$ となる．したがって，$n\geqq n_0$ なら $\phi_{t_n}(x_0)=\phi^{x_0}(t_n)\in\phi^{x_0}([s,\infty))$ となる．このことから，$y=\lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0)\in\overline{\phi^{x_0}([s,\infty))}$ となり，$\omega\lim(x_0)\subset\bigcap_{0\leqq s<\infty}\overline{\phi^{x_0}([s,\infty))}$ がわかる．

逆に $y\in\bigcap_{0\leqq s<\infty}\overline{\phi^{x_0}([s,\infty))}$ とすると，任意の自然数 n に対して $y\in\overline{\phi^{x_0}([n,\infty))}$ となる．したがって，適当な実数 $t_n\geqq n$ があって $d(y,\phi^{x_0}(t_n))<1/n$ とできる(ここで d は M の距離関数)．

したがって，$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ で $\lim_{n\to\infty}\phi^{x_0}(t_n)=y$ となる．すなわち $y\in\omega\lim(x_0)$

となる．

以上で $\bigcap_{0\leq s<\infty}\overline{\phi^{x_0}([s,\infty))}\subset\omega\lim(x_0)$ がわかり，したがって，$\bigcap_{0\leq s<\infty}\overline{\phi^{x_0}([s,\infty))}=\omega\lim(x_0)$ が証明された．

$\overline{\phi^{x_0}([s,\infty))}$ は閉集合であるから，その共通部分である $\omega\lim(x_0)$ も閉集合である．

$\alpha\lim(x_0)$ についても同様である．▮

x_0 の適当な開近傍 U と正数 τ があって

$$\Big(\bigcup_{t>\tau}\phi_t(U)\Big)\cap U=\phi$$

とできるとき，x_0 を**遊走点**という．

このとき，定義から，U の各点は遊走点となる．したがって，遊走点全体の集合は，このような開近傍全体の和集合として，開集合となる．

遊走点でない点を**非遊走点**という．すると，x_0 が非遊走点となるための必要十分条件は，x_0 の任意の近傍 U と任意の正数 τ に対して

$$\Big(\bigcup_{t>\tau}\phi_t(U)\Big)\cap U\neq\phi$$

となることである．

非遊走点全体の集合を**非遊走集合**といい，Ω で表わす．これは遊走点全体の集合の補集合であるから，閉集合となる．

定義から，特異点は非遊走点である．また，周期軌道の各点は非遊走点である．そして，さらに，つぎの命題が成立する．

命題 2　α 極限点，ω 極限点は非遊走点である．

証明　$y=\lim_{n\to\infty}\phi^{x_0}(t_n)$，$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$，$x_0\in M$ とする．U を y の任意の近傍，τ を任意の正数とする．

$\lim_{n\to\infty}\phi^{x_0}(t_n)=\lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0)=y$ から，適当な n_0 があって，$n\geqq n_0$ なら $\phi_{t_n}(x_0)\in U$ となる．いま，$t>\tau$ とすると，$\phi_{t_{n_0}}(x_0)\in U$ であるから，$\phi_{t+t_{n_0}}(x_0)=\phi_t(\phi_{t_{n_0}}(x_0))\in\phi_t(U)$ となる．一方，$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ から，n を十分大きくとって，$n\geqq n_0$，$t_n-t_{n_0}=t>\tau$ となるようにできる．すると，このような n に対して $\phi_{t_n}(x_0)\in\phi_t(U)\cap U$ となる．すなわち，$\Big(\bigcup_{t>\tau}\phi_t(U)\Big)\cap U\neq\phi$ となる．

以上で ω 極限点は非遊走点であることがわかった．α 極限点についても同

様である． ▌

一般に，位相群 G の M への作用 $\phi: G\times M\to M$ があるとき，M の部分集合 N がつぎの条件(＊)をみたすとき，これを**不変集合**という．

(＊)　G の各元 g に対して $\phi_g(N)\subset N$.

実は，このとき $\phi_g(N)=N$ が成立していることが，つぎのようにしてわかる．すなわち，(＊)を g^{-1} に対して適用すると $\phi_{g^{-1}}(N)=(\phi_g)^{-1}(N)\subset N$ となる．したがって，$N\subset\phi_g(N)$ が成立する．(＊)と合わせれば，$\phi_g(N)=N$ である．

命題 3　不変集合の和集合，共通部分はまた不変集合である．また不変集合の差集合も不変集合である．

N を不変集合とすると，その内部 $\mathrm{Int}\,N$，境界 $\mathrm{Bd}\,N$，閉包 $\bar{N}$，外部 $\mathrm{Ext}\,N$ はすべて不変集合である．

証明　不変集合の和集合および共通部分が不変集合であることは，定義から明らかである．また，上に注意したように，N を不変集合とすると，各 $g\in G$ に対して $\phi_g(N)=N$ となることから，ϕ_g が全単射であることに注意すると，不変集合の差集合も不変集合であることがわかる．

つぎに，N を不変集合とすると，$g\in G$ として $\phi_g(N)=N$ となる．また，ϕ_g は連続だから，第2章§3定理1によって，$\phi_g(\bar{N})\subset\overline{\phi_g(N)}=\bar{N}$ となる．すなわち，$\bar{N}$ は不変集合である．

また，$\mathrm{Int}\,N$ は N に含まれる開集合で，ϕ_g は同相写像だから，$\phi_g(\mathrm{Int}\,N)$ は $\phi_g(N)$ に含まれる開集合である．したがって，第2章§2定理1から，$\phi_g(\mathrm{Int}\,N)\subset\mathrm{Int}\,\phi_g(N)$ となる．

$\mathrm{Bd}\,N=\bar{N}-\mathrm{Int}\,N$ で(第2章§2定理2)，$\bar{N}, \mathrm{Int}\,N$ は不変だから，$\mathrm{Bd}\,N$ も不変集合である．

$\mathrm{Ext}\,N=(\bar{N})^c=M-\bar{N}$ で，$M, \bar{N}$ は不変だから，$\mathrm{Ext}\,N$ も不変である． ▌

M の空でない不変な閉集合であって，それに含まれる不変な閉集合は，空集合かまたはそれ自身に限るようなものを，**極小集合**という．

命題 4　空でないコンパクトな不変集合は極小集合を含む．

証明　Nを空でないコンパクトな不変集合とする．Nにふくまれる空でないコンパクト(実は閉集合ということと同じ)不変集合全体の集合を$\mathscr{C}$とする．$\mathscr{C}\ni N$であるから，$\mathscr{C}$は空でない．そして，$\mathscr{C}$の2つの元N_1, N_2に対して，$N_1\subset N_2$のとき$N_1\geq N_2$と定義する．すると，これは$\mathscr{C}$の順序となることはすぐわかるが，さらに，これが帰納的であることを証明しよう．

いま，$\mathscr{D}$を$\mathscr{C}$の空でない全順序部分集合とする．すると，$\mathscr{D}$は有限交叉性をもつNの閉集合の集まりである．Nはコンパクトだから，第2章§6命題1から$\bigcap_{N'\in\mathscr{D}}N'\neq\phi$となる．そして$\bigcap_{N'\in\mathscr{D}}N'$は，命題3と第2章§6定理2から，コンパクトな不変集合である．したがって，これは$\mathscr{C}$に属する．これが$\mathscr{D}$の上限であることは，簡単に確かめることができる．

以上で$\mathscr{C}$が帰納的であることがわかった．したがって，Zornの補題(第1章§4)から，$\mathscr{C}$には極大元N_0が存在する．このN_0がNに含まれる極小集合であることはすぐわかる．▮

さて，ここで$G=\boldsymbol{R}$の場合にもどることにする．

命題 5　α極限集合，ω極限集合，遊走点全体の集合，非遊走集合はすべて不変集合である．

証明　$y\in\omega\lim(x_0)$とする．すると$y=\lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0)$，$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$となる．すると，各$t_0\in\boldsymbol{R}$に対して

$$\phi_{t_0}(y)=\phi_{t_0}(\lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0))=\lim_{n\to\infty}\phi_{t_0}(\phi_{t_n}(x_0))=\lim_{n\to\infty}\phi_{t_0+t_n}(x_0)$$

となる．そして，$\lim_{n\to\infty}(t_0+t_n)=\infty$となるから，$\phi_{t_0}(y)\in\omega\lim(x_0)$となる．すなわち，$\omega\lim(x_0)$は不変集合である．

α極限集合についても同様である．

x_0を遊走点とする．すると適当な開近傍Uと正数τがあって，$(\bigcup_{t>\tau}\phi_t(U))\cap U=\phi$となる．したがって，$t_0\in\boldsymbol{R}$として，$\phi_{t_0}$が全単射であることに注意すると

$$\begin{aligned}\phi&=\phi_{t_0}((\bigcup_{t>\tau}\phi_t(U))\cap U)=(\phi_{t_0}(\bigcup_{t>\tau}\phi_t(U)))\cap\phi_{t_0}(U)\\&=(\bigcup_{t>\tau}\phi_{t_0}(\phi_t(U)))\cap\phi_{t_0}(U)=(\bigcup_{t>\tau}\phi_{t_0+t}(U))\cap\phi_{t_0}(U)\\&=(\bigcup_{t>\tau}\phi_t(\phi_{t_0}(U)))\cap\phi_{t_0}(U)\end{aligned}$$

となる．ここで $\phi_{t_0}(U)$ は $\phi_{t_0}(x_0)$ の開近傍となるから，$\phi_{t_0}(x_0)$ は遊走点である．

以上で遊走点全体の集合が不変集合であることがわかった．非遊走集合はその補集合だから不変である．▮

命題 6　コンパクトな空でない不変集合 N の任意の点 x_0 に対して，その α 極限集合，ω 極限集合は空でない．したがって，非遊走集合も空でない．

証明　$x_0 \in N$ とすると，任意の自然数 n に対して $\phi_n(x_0) \in N$ となる．N はコンパクトだから，その点列 $\{\varphi_n(x_0)\}$ は収束する部分列 $\{\varphi_{n_k}(x_0)\}$ を含む．いま，$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x_0) = y$ とすると，$y \in N$ で $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$ となる．すなわち，$y \in \omega \lim(x_0)$ である．したがって，ω 極限集合 $\omega \lim(x_0) \neq \phi$．

α 極限集合についても同様である．後は命題2から明らかである．▮

以上で1つの軌道の状態についての簡単な解説を終えることにするが，つぎに，これらの軌道の大域的な状態を位相的に考察するとは，なにを意味するかについて，簡単な説明をしよう．

2つの空間 M, N の上の力学系を $\phi: \boldsymbol{R}\times M\to M$，$\psi: \boldsymbol{R}\times N\to N$ とする．いま，M から N への適当な同相写像 $h: M\to N$ があって，h は ϕ の各軌道を ψ の各軌道の上へ，その向きを保ちながら写像するとき，力学系 ϕ は力学系 ψ と**位相同値**であるという．そして，このような h を ϕ から ψ への**位相同値写像**という．

これをさらに詳しくいうと，M の各点 x に対して，$h\phi^x: \boldsymbol{R}\to N$ と $\psi^{h(x)}: \boldsymbol{R}\to N$ は同じ像と同じ向きをもつ N の曲線である．

このように定義すると，2つの力学系の間の位相同値写像は，特異点，周期軌道，α 極限点，ω 極限点，遊走点，非遊走点などの間の1対1の対応をひき起こすことがわかる．また，これは軌道の集合の間の位相的な位置関係を保つものであることは明らかである．

位相力学系のこのような位相同値関係について研究するのが，位相力学の目的であるともいえる．

さて，上の定義の中で，M, N を C^r 多様体，$h: M\to N$ を C^r 微分同相写像としても同様な同値関係が定義される．これを，2つの力学系の間の C^r **同値**

という．しかし，この C^r 同値という関係は，非常にきつい条件で，取扱いが困難である．また問題によっては，$h: M \to N$ が C^r 微分同相写像である必要もないので，Poincaré, Birkhoff 以来，位相同値関係が重要視されて来た．

そこでわれわれは，C^r 多様体の上の C^r 級力学系の位相同値関係を研究する，というように問題を設定する．これが微分可能な力学系の主問題である．

これを C^r ベクトル場から生成される C^r 級力学系の位相同値関係の研究というように考えれば，これは常微分方程式の定性的理論と呼ばれるものの一般化でもある．

(II)　$G=\boldsymbol{Z}$ の場合

M を距離空間，$\phi: \boldsymbol{Z} \times M \to M$ を M の上の力学系とする．いま $\phi_1 = f: M \to M$ とおくと，f は同相写像である．そして，正の整数 n に対して $f^n = f \cdots f$ (n 個の合成)，$f^0 = 1$(恒等写像)，負の整数 n に対して $f^n = f^{-1} \cdots f^{-1}$ ($-n$ 個の合成)，とおくと，$\phi_n = f^n$，$n \in \boldsymbol{Z}$ となる．

逆に，同相写像 $f: M \to M$ に対して，$\phi: \boldsymbol{Z} \times M \to M$ を $\phi(n, x) = f^n(x)$，$(n, x) \in \boldsymbol{Z}$ とおくと，これは M の上の力学系となる．これを f **で生成される力学系**という．

ここで述べたことから，$G=\boldsymbol{Z}$ の場合，M の上の力学系は M の同相写像と同一視してよいことがわかった．そこで，今後**同相写像 $f: M \to M$ を M の力学系**という．

M が C^r 多様体のとき M の上の C^r 級力学系 $\phi: \boldsymbol{Z} \times M \to M$ に対して $\phi_1 = f: M \to M$ は C^r 微分同相写像となる．また逆に，M の C^r 微分同相写像 $f: M \to M$ の生成する力学系は C^r 級力学系である．したがって，**C^r 微分同相写像 $f: M \to M$ を M の上の C^r 級力学系**ということにする．

力学系 $f: M \to M$ に対して，$x_0 \in M$ を通る軌道 $\mathrm{Orb}(x_0)$ は，集合 $\{f^n(x_0); n \in \boldsymbol{Z}\}$ と一致する．そして，(I)と同様にして，$\mathrm{Orb}(x_0)$ にはつぎの2つの状態のどれか1つが成立する．

(1)　$\phi^{x_0}: \boldsymbol{Z} \to M$，$\phi^{x_0}(n) = f^n(x_0)$ は単射である．すなわち，相異なる $m, n \in \boldsymbol{Z}$ に対して $f^m(x_0) \neq f^n(x_0)$ となる．したがって $\mathrm{Orb}(x_0)$ は可算集合であ

る.

(2)　$f^n(x_0)=x_0$ となる零でない整数 n が存在する．このとき，x_0 を**周期点**，n をその**周期**という．x の周期全体の集合を P とすると，P は $\boldsymbol{Z}$ の部分群となる．そして，正の周期は存在して，その中で最小なものを n_0 とすると，$P=\{kn_0;\ k\in\boldsymbol{Z}\}$ となる．この n_0 を**最小周期**という．

$n_0=1$ のとき，すなわち $f(x_0)=x_0$ のとき，x_0 を f の**不動点**という．このとき $\mathrm{Orb}(x_0)=\{x_0\}$ である．

さらに一般に $\mathrm{Orb}(x_0)$ は n_0 個の相異なる点 $x_0, f(x_0), \cdots, f^{n_0-1}(x_0)$ からなる集合である．(ここでは $n_0>1$，すなわち $P\neq\boldsymbol{Z}$ のときと，$n_0=1$，すなわち，$P=\boldsymbol{Z}$ のときを区別しない．)

f の不動点全体の集合を $\mathrm{Fix}(f)$，周期点全体の集合を $\mathrm{Per}(f)$ で表わす．すると，定義から $\mathrm{Per}(f)=\bigcup_{n\geqq 1}\mathrm{Fix}(f^n)$ が成立する．特に，$\mathrm{Per}(f)\supset\mathrm{Fix}(f)$ である．

M の部分集合 N が，力学系 $f:M\to M$ の不変集合となるための必要十分条件は，$f(N)=N$ となることである．(**注意**　$f(N)\subset N$ では不十分である．) これは定義からすぐわかる．

$\mathrm{Fix}(f), \mathrm{Per}(f)$ は不変集合である．特に，$\mathrm{Fix}(f)$ は閉不変集合である．証明は簡単だから省略する．

つぎに，$y\in M$ が x_0 の **$\boldsymbol{\omega}$ 極限点**ということを，つぎのように定義しよう．すなわち，$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ となるような整数列 $\{t_n\}$ を適当にとって，$\lim_{n\to\infty}f^{t_n}(x_0)=y$ となるとき，y は x_0 の ω 極限点という．そして，x_0 の ω 極限点全体の集合を $\omega\lim(x_0)$ で表わし，x_0 の **$\boldsymbol{\omega}$ 極限集合**という．

上の定義の中で，$\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$ を $\lim_{n\to\infty}t_n=-\infty$ と置きかえて，x_0 の **$\boldsymbol{\alpha}$ 極限点**とか，**$\boldsymbol{\alpha}$ 極限集合** $\alpha\lim(x_0)$ の定義を得る．

$\alpha\lim(x_0), \omega\lim(x_0)$ が閉不変集合となることは，前と同様にわかる．また，x_0 が周期点なら，$\mathrm{Orb}(x_0)=\alpha\lim(x_0)=\omega\lim(x_0)$ が成立する．

x_0 の適当な開近傍 U があって $(\bigcup_{n\geqq 1}f^n(U))\cap U=\phi$ となるとき，x_0 は**遊走点**という．すると，遊走点全体の集合は開集合でかつ不変集合となる．

遊走点でない点を**非遊走点**という．非遊走点全体の集合を**非遊走集合**といい，$\Omega(f)$で表わす．これは閉不変集合である．そして，任意の点 $x_0 \in M$ に対して，$\alpha \lim(x_0)$および $\omega \lim(x_0)$は $\Omega(f)$に含まれる．特に，$\mathrm{Per}(f) \subset \Omega(f)$となる．

以上で，力学系 $f: M \to M$ の1つの軌道の状態についての簡単な説明を終え，つぎに，大域的な状態の説明へ進むことにする．

いま，$f: M \to M$, $g: N \to N$ を2つの力学系とする．このとき，適当な同相写像 $h: M \to N$ があって，つぎの図が可換となるとき，f と g は**位相的に共役**，または**位相同値**という．

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

すなわち，$gh=hf$，または $g=hfh^{-1}$ が成立するときである．この h を f と g の間の**位相同値写像**という．

このとき，帰納法によって，任意の $n \in \boldsymbol{Z}$ に対して，$g^n h = hf^n$ が成立する．したがって，$x_0 \in M$ に対して $hf^n(x_0) = g^n h(x_0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ となる．すなわち，$h(\mathrm{Orb}(x_0)) = \mathrm{Orb}(h(x_0))$となる．

このように，h は f の軌道を g の軌道の上へ写像するが，さらに，不動点，周期点，α 極限点，ω 極限点などの間の1対1の対応をひき起こす．また，さらに，これは軌道の集合の間の位相的な位置関係を保つ写像である．

上の定義の中で，M, N を C^r 多様体，f, g を C^r 級力学系，h を C^r 微分同相写像として，2つの力学系 f, g の間の C^r 同値が定義される．しかしわれわれは，C^r 級力学系の間の位相同値関係の方を主題として考察することにする．

(III)　$G=\boldsymbol{R}$ と $G=\boldsymbol{Z}$ のときの相互関係

ここでは，証明はすべて省略する．詳しくは，あとがきにある文献を参照されたい．

$\phi: \boldsymbol{R} \times M \to M$ を連続力学系とする．$\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{R}$ だから，ϕ を $\boldsymbol{Z} \times M$ へ制限した $\phi | \boldsymbol{Z} \times M: \boldsymbol{Z} \times M \to M$ は離散力学系である．このように，連続力学系から離散

力学系が簡単に得られるが，任意の離散力学系が，このようにして得られるわけではない．どのような離散力学系が，このようにして得られるかは，興味ある問題である．

つぎに，離散力学系 $f: M \to M$ の懸垂について説明しよう．いま，$\boldsymbol{R} \times M$ につぎのような関係を定義する．すなわち，$(t, x), (t', x') \in \boldsymbol{R} \times M$ に対して，$t' = t+n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ かつ $x = f^n(x')$ が成立するとき，$(t, x) \sim (t', x')$ と定義する．すなわち，$(t, f^n(x')) \sim (t+n, x')$, $n \in \boldsymbol{Z}$ である．

これが同値関係であることは簡単に確かめられる．この同値類全体の作る商空間を $M_f = \boldsymbol{R} \times M / \sim$ とする．そして，$(t, x) \in \boldsymbol{R} \times M$ の同値類を $[t, x] \in M_f$ と表わす．いま，$\phi: \boldsymbol{R} \times M_f \to M_f$ を $\phi(s, [t, x]) = [t+s, x]$, $s, t \in \boldsymbol{R}$, $x \in M$ とおくと，これはうまく定義できることが証明できる．そして，ϕ は M_f の上の力学系となることもわかる．

このようにして定義した連続力学系 $\phi: \boldsymbol{R} \times M_f \to M_f$ を f の**懸垂**という．$[0, x]$ を通る ϕ の軌道は $\{[t, x];\ t \in \boldsymbol{R}\} \subset M_f$ である．

M が C^r 多様体で，f が C^r 級力学系のとき，M_f には自然に C^r 多様体の構造が入り，ϕ が C^r 級となることが証明できる．すなわち，C^r 級の離散力学系の懸垂は，C^r 級連続力学系である．

この操作は Smale によって考案され，微分可能な力学系の理論の中で重要な役割りを果たしているが，これはつぎに定義するベクトル場の断面の理論に関連するものである．

M を n 次元 C^{r+1} 多様体，s を M の上の C^r ベクトル場とする．s の生成する M の連続 C^r 力学系を $\phi: \boldsymbol{R} \times M \to M$ とする．いま M の $(n-1)$ 次元閉部分多様体 Σ がつぎの 3 つの性質をみたすとき，これを s の**断面**という．

(1)　Σ は s に横断的に交わる．すなわち，Σ の各点 x に対して $s(x) \in T_x(M)$ の生成する部分ベクトル空間を $L(s(x))$ とすると $T_x(\Sigma') + L(s(x)) = T_x(M)$ となる．

(2)　Σ の点 x を通る s の積分曲線(ϕ の軌道)を ϕ^x とすると，$\phi^x(t_1) \in \Sigma$, $t_1 > 0$, $\phi^x(t_2) \in \Sigma$, $t_2 < 0$ となるような t_1, t_2 が存在する．

(3)　s の任意の積分曲線は Σ と交わる．

いま，Σ が s の断面とすると集合 $\{t>0;\ \phi^x(t)\in\Sigma\}$ には最小元がある．これを $t_0(x)$ とする．そして，$f:\Sigma\to\Sigma$ を $f(x)=\varphi^x(t_0(x))$ と定義する．すなわち，$f(x)$ は x を通る軌道にそって，t が正の方向へ進んだとき，最初に Σ と交わる点である．すると，f は C^r 微分同相写像であることがわかる．

さらに，この $f:\Sigma\to\Sigma$ の懸垂を $\psi:\boldsymbol{R}\times\Sigma_f\to\Sigma_f$ とすると，これは初めの力学系 $\phi:\boldsymbol{R}\times M\to M$ と C^r 同値であることがわかる．

§6　力学系の空間

ここでは，C^0 多様体は位相空間，その部分多様体は部分空間を意味するものとする．そして，r を零，正の整数，または ∞ とする．

いま，$\xi=(E,B,\pi)$ を C^r ベクトル束とする．写像 $s:B\to E$ が ξ の**断面**とは，各 $x\in B$ に対して $s(x)\in E_x=\pi^{-1}(x)$ となるときをいう．

ξ の2つの断面 $s_1,s_2:B\to E$ に対して，その和 $s_1+s_2:B\to E$ を $(s_1+s_2)(x)=s_1(x)+s_2(x)$，$x\in B$ によって定義する．各ファイバー E_x が Banach 空間の構造をもつことから，s_1+s_2 はうまく定義できて，ξ の断面となる．

同様に，実数 λ と ξ の断面 $s:B\to E$ に対して，s の λ 倍 $\lambda s:B\to E$ も $(\lambda s)(x)=\lambda s(x)$，$x\in B$ で定義することができて，ξ の断面となる．

ξ の断面全体の集合 $\Gamma(\xi)$ は，この和とスカラー倍に関してベクトル空間となる．この零元は，B の各点 x に対して E_x の零元 0_x を対応させる写像である．これを ξ の**零断面**といい $0:B\to E$ で表わす．また，$s\in\Gamma(\xi)$ の逆元 $-s$ は $(-1)s$ と一致する．

命題 1　ξ の C^r 断面全体の集合を $\Gamma^r(\xi)$ とすると，これは $\Gamma(\xi)$ の部分ベクトル空間である．

証明　(U,F,h) を ξ の C^r 束座標近傍とする．すると，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U\times F \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad U \quad \swarrow{\scriptstyle p_1} & \end{array}$$

ここで，h は C^r 微分同相写像，p_1 は第1成分への射影，そして F は Banach 空間である．

上の図の可換性から，各 $x\in U$ に対して，h は $E_x=\pi^{-1}(x)$ から $\{x\}\times F=F$ への写像をひき起こす．これを $h_x: E_x\to F$ とすると，h_x は線型同相写像である．

$s: B\to E$ を ξ の断面とし，$x\in U$ に対して $s_U(x)=h_xs(x)$ とおくと，これはうまく定義できて $hs(x)=(x, s_U(x))$，$x\in U$ が成立する．ここで定義された写像 $s_U: U\to F$ を s の**局所表現**という．

$hs(x)=(x, s_U(x))$，$x\in U$ から，$s|U$ が C^r 級となるための必要十分条件は s_U が C^r 級となることがわかる．

ξ の零断面 0 の局所表現 $0_U: U\to F$ は $0_U(x)=0$，$x\in U$ で与えられる定値写像であるから，これは C^r 級となる．すなわち，$0\in\Gamma^r(\xi)$ となる．

また，$s_1, s_2\in\Gamma(\xi)$ とすると，$(s_1+s_2)_U=s_{1U}+s_{2U}$ が成立する．したがって，$s_1, s_2\in\Gamma^r(\xi)$ なら，$s_1+s_2\in\Gamma^r(\xi)$ となる．同様に，$s\in\Gamma(\xi)$ に対して，$(\lambda s)_U=\lambda s_U$ (λ は実数)が成立するから，$s\in\Gamma^r(\xi)$ なら $\lambda s\in\Gamma^r(\xi)$ となる．▌

これから，ξ の底空間 B はコンパクト Hausdorff 空間と仮定する．したがって，$r\geqq 1$ なら B は有限次元のコンパクト微分可能多様体である．

また，これからの理論の証明は，$r\geqq 1$ の場合についてのみ行なう．$r=0$ のときは，コンパクト Hausdorff 空間が正規空間であること (第2章§7定理1) を用いて，全く同様に議論できるので，証明は省略する．

補題 1 $0<a<b$ をみたす任意の実数 a, b に対して，つぎの条件をみたす C^∞ 級関数 $f: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が存在する．

(1) $|t|\leqq a$ ならば $f(t)=1$

(2) $|t|\geqq b$ ならば $f(t)=0$

(3) $a<|t|<b$ ならば $0<f(t)<1$

証明
$$g(t)=\begin{cases} e^{-1/t^2}, & t>0, \\ 0, & t\leqq 0 \end{cases}$$
とおくと，帰納的に $g^{(n)}(t)=e^{-1/t^2}p_n(t)/t^{3n}$，$t>0$（ここで，$P_n(t)$ は次数が $3n$ より小さい多項式），および $g_n(t)=0$，$t\leqq 0$ が成立することがわかる．このことから，g は C^∞ 級となる．

いま，$h(t)=g(t)/(g(t)+g(1-t))$ とおくと，これは C^∞ 級で，$t\leqq 0$ ならば $h(t)=0$；$0<t<1$ ならば $0<h(t)<1$；$t\geqq 1$ ならば $h(t)=1$ となる．

そこで，$f(t)=h((b+t)/(b-a))h((b-t)/(b-a))$ とおくと，これが補題1の各条件をみたすことは簡単にわかる．▌

d を正数とする．いま，$|x_i|\leqq d$，$i=1,\cdots,n$ で定義される $\boldsymbol{R}^n$ の閉立方体を $Q(d)$ とする．すると，その内部 $\mathrm{Int}\,Q(d)$ は $|x_i|<d$，$i=1,\cdots,n$ で定義される $\boldsymbol{R}^n$ の開立方体である．これから，$Q(d)(\mathrm{Int}\,Q(d))$ を原点を中心とする半径 d の閉(開)立方体という．

補題 2　$0<a<b$ をみたす任意の実数 a,b に対して，つぎの条件をみたす C^∞ 級関数 $\varphi:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ が存在する．

(1)　$x\in Q(a)$　ならば　$\varphi(x)=1$

(2)　$x\notin \mathrm{Int}\,Q(b)$　ならば　$\varphi(x)=0$

(3)　$x\in \mathrm{Int}\,Q(b)-Q(a)$　ならば　$0<\varphi(x)<1$

証明　補題1の C^∞ 級関数 $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ をとり，$\varphi(x)=f(x_1)\cdots f(x_n)$，$x=(x_1,\cdots,x_n)$ とおけばよい．▌

補題 3　$\xi=(E,B,\pi)$ を C^r ベクトル束とし，B をコンパクト Hausdorff 空間とする．すると，任意の $v\in E_{x_0}$，$x_0\in B$ に対して $s(x_0)=v$ となる ξ の C^r 断面 s が存在する．

したがって，特に，ある点 $x_0\in B$ で $E_{x_0}\neq\{0\}$ が成立するなら，$\Gamma^r(\xi)\neq\{0\}$ となる．

証明　x_0 を含む ξ の C^r 束座標近傍を (U,F,h) とする．必要なら，U を小さくとって，これが B の C^r 座標近傍 (U,α) の定義域となるようにする．そして，$\alpha(x_0)=0$ をみたすようにする（§3 命題2 と §1 命題2）．

$\alpha(U)$は 0 を含む開集合だから，十分小さな正数 b をとって $Q(b)\subset\alpha(U)$ とすることができる．いま，$a=b/2$ として補題 2 を適用し，C^∞ 級関数 $\varphi:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ が補題 2 の条件をみたすものとする．

いま，$v\in E_{x_0}$ に対して，$s:B\to E$ をつぎのように定義する．

$$s(x)=\begin{cases}\varphi(\alpha(x))h_x{}^{-1}h_{x_0}(v), & x\in U,\\ 0_x, & x\notin U\end{cases}$$

そうすると，これは ξ の断面であるが，s の局所表現 $s_U:U\to F$ が $s_U(x)=\varphi(\alpha(x))h_{x_0}(v)$ と表わされることから，s が C^r 級であることがわかる．そして，$s(x_0)=v$ となる．▌

命題 2 $\xi=(E,B,\pi)$を C^r ベクトル束，B をコンパクト Hausdorff 空間とする．すると，つぎの条件(＊)をみたす ξ の C^r 束座標近傍系 $\mathcal{U}=\{(U_i,F_i,h_i);\ i=1,\cdots,m\}$ が存在する．

(＊) 各 $i=1,\cdots,m$ に対して，U_i の閉包 $\bar{U}_i$ を含む B の適当な開集合 $\tilde{U}_i$ があって，(U_i,F_i,h_i)は $\tilde{U}_i$ の上の ξ の C^r 束座標近傍$(\tilde{U}_i,F_i,h_i)$に拡張できる．(ここで h_i の拡張も同じ h_i で表わすことにする.)

さらに，$r\geqq1$ の場合は，$\tilde{U}_i$ は B の C^r 座標近傍$(\tilde{U}_i,\alpha_i)$の定義域となるようにできる．

証明 B の各点 x に対して，x を含む ξ の C^r 束座標近傍$(\tilde{U}^x,F^x,h^x)$をとる．そして，$\tilde{U}^x$ は B の C^r 座標近傍$(\tilde{U}^x,\alpha^x)$の定義域で，$\alpha^x(x)=0$ となるようにする．

$\alpha^x(\tilde{U}^x)$は 0 を含む開集合だから，適当な正数 b^x があって，$Q(b^x)\subset\alpha^x(\tilde{U}^x)$ とできる．いま，$U^x=(\alpha^x)^{-1}(\mathrm{Int}\,Q(b^x))$ とおくと，$\bar{U}^x=(\alpha^x)^{-1}(Q(b^x))\subset\tilde{U}^x$ となる．

$\{U^x;\ x\in B\}$ は B の開被覆で，B はコンパクトだから，B の適当な有限個の点 $x_1,\cdots,x_m$ が存在して，$\{U^{x_1},\cdots,U^{x_m}\}$ は B を覆う．これに対応する ξ の C^r 束座標近傍を$(U_1,F_1,h_1),\cdots,(U_m,F_m,h_m)$とすると，これが求めるものである．▌

定理 1 $\xi=(E,B,\pi)$を C^r ベクトル束とし，その底空間 B をコンパクト

Hausdorff 空間とする $(0\leqq r<\infty)$．いま $\mathcal{U}=\{(U_i, F_i, h_i)\,;\ i=1, \cdots, m\}$ を命題2の条件をみたす ξ の C^r 束座標近傍系とすると，これを用いて $\Gamma^r(\xi)$ に自然なノルム $\|\cdot\|_r{}^{\mathcal{U}}$ を定義することができる．そして，このノルムに関して，$\Gamma^r(\xi)$ は Banach 空間となる．

また，$\mathcal{V}=\{(V_j, G_j, k_j)\,;\ j=1, \cdots, l\}$ を，命題2の条件をみたすもう1つの ξ の C^r 束座標近傍系とすると，$\Gamma^r(\xi)$ の2つのノルム $\|\cdot\|_r{}^{\mathcal{U}}, \|\cdot\|_r{}^{\mathcal{V}}$ は同値である．

証明　$\mathcal{U}=\{(U_i, F_i, h_i)\,;\ i=1, \cdots, m\}$ を命題2の条件をみたす ξ の C^r 束座標近傍系とする．命題2と同じ記号を使うことにして，各点 $x\in\tilde{U}_i$ に対して $h_{ix}:E_x\to F_i$ を C^r 微分同相写像 $h_i:\pi^{-1}(\tilde{U}_i)\to\tilde{U}_i\times F_i$ の定める線型同相写像とする．そして，$(\tilde{U}_i, \alpha_i)$ に対する有限次元 Banach 空間を E_i とする．

いま，$s:B\to E$ を ξ の C^r 断面とし，この局所表現を $s^{(i)}:\tilde{U}_i\to F_i$，すなわち $s^{(i)}(x)=h_{ix}s(x)$，$x\in\tilde{U}_i$ とする．

仮定から，$\bar{U}_i\subset\tilde{U}_i$ で，$\bar{U}_i$ はコンパクト Hausdorff 空間の閉集合としてコンパクトである．したがって，$\alpha_i(\bar{U}_i)$ もコンパクトとなる．そして，$s^{(i)}\alpha_i{}^{-1}:\alpha_i(\tilde{U}_i)\to F_i$ は C^r 級である．コンパクト集合の上の C^r 写像はすべて C^r 有界だから，$s^{(i)}\alpha_i{}^{-1}$ は $\alpha_i(\bar{U}_i)$ の上で C^r 有界である．したがって，$\alpha_i(U_i)$ 上でも C^r 有界となる．すなわち，$s^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i)\in\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i)\,;F_i)$ となる．そこで，$\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i)\,;F_i)$ のノルムを $\|\cdot\|_r$ として，

$$\|s\|_r{}^{\mathcal{U}}=\max\{\|s^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i)\|_r;\ i=1, \cdots, m\}$$

と定義する．

これが $\Gamma^r(\xi)$ のノルムとなることは簡単に確かめることができる．そこで，このノルムに関して $\Gamma^r(\xi)$ が完備となることを証明しよう．

いま，$\{s_n\}$ を $\Gamma^r(\xi)$ のノルム $\|\cdot\|_r{}^{\mathcal{U}}$ に関する基本列とする．すると，定義から，各 $i=1, \cdots, m$ に対して，$\{s_n{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i)\}$ は $\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i)\,;F_i)$ の基本列となる．しかるに，$\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i)\,;F_i)$ は，第5章§3命題6によって，完備である．したがって $\{s_n{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i)\}$ は C^r 有界な写像 $t^{(i)}:\alpha_i(U_i)\to F_i$ に（$\|\cdot\|_r$ に関して）収束する．

一方，B の各点 x に対して，$\{s_n(x)\}$ は E_x の点列である．そして，$h_{ix}s_n(x)$

$=s_n^{(i)}(x)$，$x \in U_i$ となる．

$\{s_n^{(i)}\alpha_i^{-1}|\alpha_i(U_i)\}$ は $\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i);\ F_i)$ の基本列だから，$x \in U_i$ に対して，$\{s_n^{(i)}\alpha_i^{-1}(\alpha_i(x))\}=\{s_n^{(i)}(x)\}$ は F_i の基本列となる．そして，$h_{ix}: E_x \to F_i$ は線型同相写像だから，$\{s_n(x)\}=\{h_{ix}^{-1}(s_n^{(i)}(x))\}$ は E_x の基本列となる．したがって，$\{s_n(x)\}$ は収束する．

いま，$s(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ とおくと，$s: B \to E$ は ξ の断面となる．そして，$x \in U_i$ として

$$h_{ix}s(x) = h_{ix}(\lim_{n\to\infty} s_n(x)) = \lim_{n\to\infty} h_{ix}s_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n^{(i)}(x)$$
$$= \lim_{n\to\infty} s_n^{(i)}\alpha_i^{-1}(\alpha_i(x)) = t^{(i)}(\alpha_i(x))$$

となる．すなわち，s の局所表現は $t^{(i)}\alpha_i$ となる．$t^{(i)}$ は C^r 級だから s も C^r 級である．

以上で $s \in \Gamma^r(\xi)$ となることがわかった．s の作り方から，$\{s_n\}$ が $\|\cdot\|_r^{\mathcal{U}}$ に関して s に収束することは明らかである．

以上で定理1の前半の証明が終った．

つぎに，$\mathcal{U}=\{(U_i, F_i, h_i);\ i=1, \cdots, m\}$，$\mathcal{V}=\{(V_j, G_j, k_j);\ j=1, \cdots, l\}$ を命題2の条件をみたす ξ の C^r 束座標近傍系とし，$\tilde{U}_i, \tilde{V}_j$ は $\bar{U}_i, \bar{V}_j$ を含む開集合で，$(\tilde{U}_i, \alpha_i), (\tilde{V}_j, \beta_j)$は B の C^r 座標近傍とする．

いま，$s: B \to E$ を ξ の C^r 断面とし，$s_1^{(i)}: \tilde{U}_i \to F_i$，$i=1, \cdots, m$，$s_2^{(j)}: \tilde{V}_j \to G_j$，$j=1, \cdots, l$ を $s_1^{(i)}(x)=h_{ix}s(x)$，$x \in \tilde{U}_i$，$s_2^{(j)}(x)=k_{jx}s(x)$，$x \in \tilde{V}_j$ で定まる s の局所表現とする．すると

$$\|s\|_r^{\mathcal{U}} = \max\ \{\|s_1^{(i)}\alpha_i^{-1}|\alpha_i(U_i)\|_r;\ i = 1, \cdots, m\},$$
$$\|s\|_r^{\mathcal{V}} = \max\ \{\|s_2^{(j)}\beta_j^{-1}|\beta_j(V_j)\|_r;\ j = 1, \cdots, l\}$$

となる．そこで，適当な正数 a, b があって

$$a\|s\|_r^{\mathcal{U}} \leqq \|s\|_r^{\mathcal{V}} \leqq b\|s\|_r^{\mathcal{U}}$$

となることを証明すればよい．

$x \in \tilde{U}_i \cap \tilde{V}_j$ とする．$g_{ij}(x)=k_{jx}h_{ix}^{-1}: F_i \to G_j$ とおくと，これは線型同相写像で，$g_{ij}: \tilde{U}_i \cap \tilde{V}_j \to \mathcal{L}(F_i; G_j)$は C^r 級である(§3命題2)．そして，定義から

$$s_2^{(j)}(x) = k_{jx}s(x) = k_{jx}h_{ix}^{-1}h_{ix}s(x) = g_{ij}(x)(s_1^{(i)}(x))$$

となる．したがって，$y\in\beta_j(\tilde{U}_i\cap\tilde{V}_j)$とすると

$$s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}(y)=g_{ij}(\beta_j{}^{-1}(y))(s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}(\alpha_i\beta_j{}^{-1}(y)))$$

となる．

いま，$l_{ij}:\beta_j(\tilde{U}_i\cap\tilde{V}_j)\to\alpha_i(\tilde{U}_i\cap\tilde{V}_j)$を$l_{ij}=\alpha_i\beta_j{}^{-1}$と定義すると，これは$C^r$微分同相写像で，$s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}:\beta_j(\tilde{U}_i\cap\tilde{V}_j)\to G_j$は，上式から，つぎの写像の合成である．

$$\beta_j(\tilde{U}_i\cap\tilde{V}_j)\xrightarrow{(s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}l_{ij},\, g_{ij}\beta_j{}^{-1})}F_i\times\mathscr{L}(F_i;G_j)\xrightarrow{\mathrm{ev}}G_j$$

ここで，ev は$\mathrm{ev}(y,L)=L(y)$，$(y,L)\in F_i\times\mathscr{L}(F_i;G_j)$で定義される連続2重線型写像である．

$U_i\cap V_j\subset U_i\subset\bar{U}_i$で，$\bar{U}_i$はコンパクトだから，上に現われる写像は，$O_{ij}=\beta_j(U_i\cap V_j)$上ですべて$C^r$有界である．

第6章§1命題5の記号を用いることにして，ev は連続2重線型写像ev_*: $\mathscr{BC}^r(O_{ij};F_i)\times\mathscr{BC}^r(O_{ij};\mathscr{L}(F_i;G_j))\to\mathscr{BC}^r(O_{ij};G_j)$をひき起こす．そして，$s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}|O_{ij}=\mathrm{ev}_*(s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}l_{ij}|O_{ij},\, g_{ij}\beta_j{}^{-1}|O_{ij})$となる．したがって，適当な定数$b_{ij}$があって

$$\|s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}|O_{ij}\|_r\leqq b_{ij}\|s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}l_{ij}|O_{ij}\|_r\|g_{ij}\beta_j{}^{-1}|O_{ij}\|_r$$

となる．また，第6章§1命題2から，適当な定数c_{ij}があって

$$\|s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}l_{ij}|O_{ij}\|_r\leqq c_{ij}\|s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i\cap V_j)\|_r M_r(l_{ij}|O_{ij})$$

となる．ここで，$M_r(l_{ij}|O_{ij})=\max\{1,(\|Dl_{ij}|O_{ij}\|_{r-1})^r\}$である．以上から

$$\|s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}|O_{ij}\|_r\leqq b_{ij}c_{ij}M_r(l_{ij}|O_{ij})\|s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i\cap V_j)\|_r$$

がわかった．

いま，$b\geqq\max\{b_{ij}c_{ij}M_r(l_{ij}|O_{ij});\ i=1,\cdots,m,\ \ j=1,\cdots,l\}$とおくと，上式からすべての$i,j$に対して

$$\begin{aligned}\|s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}|O_{ij}\|_r&\leqq b\|s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i\cap V_j)\|_r\\&\leqq b\|s_1{}^{(i)}\alpha_i{}^{-1}|\alpha_i(U_i)\|_r\leqq b\|s\|_r{}^{\mathcal{U}}\end{aligned}$$

が成立する．したがって，各jに対して

$$\|s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}|\bigcup_{i=1}^{l}O_{ij}\|_r=\|s_2{}^{(j)}\beta_j{}^{-1}|\beta_j(V_j)\|_r\leqq b\|s\|_r{}^{\mathcal{U}}$$

が成立する．すなわち，これから，$\|s\|_r{}^{\mathcal{V}}\leqq b\|s\|_r{}^{\mathcal{U}}$がわかった．勿論$b>0$とし

てよい.

同様にして，正数 a' を適当にとって $\|s\|_r^{\mathcal{U}} \leqq a'\|u\|_r^{\mathcal{V}}$ とできる．そこで $a=1/a'$ とおけば，$a\|s\|_r^{\mathcal{U}} \leqq \|u\|_r^{\mathcal{V}}$ がわかる．▌

定理 2 $\xi=(E, B, \pi)$ を C^r ベクトル束，B をコンパクト Hausdorff 空間とする $(0 \leqq r < \infty)$．そしてさらに，ξ の各ファイバーは有限次元とする．このとき，$\Gamma^r(\xi)$ は可分な Banach 空間となる．したがって，第 2 可算公理をみたす．

この証明のために，つぎの Weierstrass の近似定理を仮定しよう．

Weierstrass の近似定理 n 変数の実数値関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が，$a_i \leqq x_i \leqq b_i$, $i=1, \cdots, n$ で定義される $\boldsymbol{R}^n$ の閉領域 K で C^r 級とする $(0 \leqq r < \infty)$．このとき，f は K 上で多項式によって r 次までの偏導関数も含めて，一様に，いくらでも近く，近似できる．

すなわち，任意の正数 ε に対して，適当な多項式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ があって，$0 \leqq k \leqq r$, $i_1+\cdots+i_n=k$, $i_1 \geqq 0$, $\cdots$, $i_n \geqq 0$ となる任意の整数 $k, i_1, \cdots, i_n$ に対して

$$\left|\frac{\partial^k f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1{}^{i_1} \cdots \partial x_n{}^{i_n}} - \frac{\partial^k P(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1{}^{i_1} \cdots \partial x_n{}^{i_n}}\right| < \varepsilon, \qquad x=(x_1, \cdots, x_n) \in K$$

が成立する．

この定理の証明は，Courant-Hilbert : Methoden der Mathematischen Physik I (1931), Springer の第 2 章にある．(邦訳クーラン-ヒルベルト：数理物理学の方法 1，東京図書)

命題 3 $a_i \leqq x_i \leqq b_i$, $i=1, \cdots, n$ で定義される $\boldsymbol{R}^n$ の閉領域を K とする．いま，F を有限次元 Banach 空間とすると $\mathcal{BC}^r(K; F)$ は可分である．すなわち稠密な可算部分集合をもつ．

証明 $F=\boldsymbol{R}$ のとき，P を n 変数多項式全体の集合とする．Weierstrass の近似定理と第 5 章 §3 定理 2 から，P は $\mathcal{BC}^r(K; \boldsymbol{R})$ の中で稠密である．

また，任意の多項式は，有理数係数の多項式で，r 次までの偏導関数を含めて，K 上で一様に，いくらでも近く，近似できる．したがって，有理数係数の多項式全体の集合を $\tilde{P}$ とすると，$\tilde{P}$ は P で稠密である．したがって，$\tilde{P}$ は

$\mathcal{BC}^r(K;\boldsymbol{R})$で稠密となる．

しかるに，$\tilde{P}$は可算集合だから，$\mathcal{BC}^r(K;\boldsymbol{R})$は可分である．

$F=\boldsymbol{R}^k$とすると，$\mathcal{BC}^r(K;\boldsymbol{R}^k)=\mathcal{BC}^r(K;\boldsymbol{R})\times\cdots\times\mathcal{BC}^r(K;\boldsymbol{R})$($k$個の直積)と考えてよい．したがって，$\tilde{P}\times\cdots\times\tilde{P}$($k$個の直積)を考えると，これは可算集合で$\mathcal{BC}^r(K;\boldsymbol{R}^n)$の中で稠密である．▌

命題2と同様な論法で，つぎの命題が証明できる．

命題 4　$\xi=(E,B,\pi)$をC^rベクトル束とし，その底空間はコンパクトHausdorff空間とする．このとき，つぎの条件をみたすξのC^r束座標近傍系$\{(V_i,F_i,h_i);\ i=1,\cdots,n\}$が存在する．

(＊)　各$i=1,\cdots,m$に対して$\bar{V}_i\subset U_i$, $\bar{U}_i\subset\tilde{U}_i$をみたす$B$の開集合$U_i$, $\tilde{U}_i$が存在して，(V_i,F_i,h_i)はξのC^r束座標近傍$(\tilde{U}_i,F_i,h_i)$に拡張できる．

また，$r\geqq 1$なら，$\tilde{U}_i$はBのC^r座標近傍$(\tilde{U}_i,\alpha_i)$の定義域となる．そして，適当な正数$0<a_i<b_i$があって，$\alpha_i(U_i)=\mathrm{Int}\,Q(b_i)$，$\alpha_i(V_i)=\mathrm{Int}\,Q(a_i)$となる．ここで，$Q(b_i), Q(a_i)$は$\boldsymbol{R}^{n_i}$の原点を中心とする半径$b_i, a_i$の閉立方体である．

定理2の証明　命題4の条件をみたすξのC^r束座標近傍系を$\{(V_i,F_i,h_i);\ i=1,\cdots,m\}$とする．命題4と同じ記号を使うことにすると，$\mathcal{U}=\{(U_i,F_i,h_i);\ i=1,\cdots,m\}$は命題2の条件をみたす．

いま，C^∞級関数$\varphi_i:\boldsymbol{R}^{n_i}\to\boldsymbol{R}$, $i=1,\cdots,m$を，$0<a_i<b_i$に対する補題2の関数とする．そして，$\tilde{\varphi}_i:B\to\boldsymbol{R}$, $i=1,\cdots,m$を

$$\tilde{\varphi}_i(x)=\begin{cases}\varphi_i\alpha_i(x), & x\in\tilde{U}_i,\\ 0, & x\notin\tilde{U}_i\end{cases}$$

と定義すると，これはC^r級となる．そして，$x\in V_i$なら$\tilde{\varphi}_i(x)=1$; $x\notin U_i$なら$\tilde{\varphi}_i(x)=0$となる．

$\{V_i;\ i=1,\cdots,m\}$はBを覆うから，各$x\in B$に対して，$\tilde{\varphi}_1(x)+\cdots+\tilde{\varphi}_m(x)\neq 0$となる．そこで，$\psi_i:B\to\boldsymbol{R}$, $i=1,\cdots,m$を，$\psi_i(x)=\tilde{\varphi}_i(x)/(\tilde{\varphi}_1(x)+\cdots+\tilde{\varphi}_m(x))$, $x\in B$と定義すると，これはC^r級で，

$$\psi_1(x)+\cdots+\psi_m(x)=1,\qquad x\in B$$

が成立する．そして，$\mathrm{supp}\,(\psi_i)=\overline{\{x\in B|\psi_i(x)\neq 0\}}\subset\tilde{U}_i$となる．

すなわち，$\{\psi_1, \cdots, \psi_m\}$ は B の開被覆 $\{\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_m\}$ に属する C^r 級の1の分解であることがわかった．

命題3から $\mathcal{BC}^r(Q(b_i)\,;F_i)$，$i=1, \cdots, m$ は可分である．すなわち，適当な可算集合 $N_i \subset \mathcal{BC}^r(Q(b_i)\,;F_i)$ があって，任意の $f_i \in \mathcal{BC}^r(Q(b_i)\,;F_i)$ と任意の正数 ε に対して，適当な $p_i \in N_i$ があって $\|f_i - p_i\|_r < \varepsilon$ とできる．

いま，$p_i \in N_i$ に対して $s_{p_i}: B \to E$ を

$$s_{p_i}(x) = \begin{cases} \psi_i(x) h_i^{-1}(x, p_i \alpha_i(x)), & x \in \tilde{U}_i \\ 0, & x \notin \tilde{U}_i \end{cases}$$

とおくと，これは ξ の C^r 断面である．そこで，$N=\{s_{p_1}+\cdots+s_{p_m};\ p_i \in N_i,\ i=1, \cdots, m\}$ とおくと，これは $\Gamma^r(\xi)$ の可算部分集合である．これが $\Gamma^r(\xi)$ の稠密な部分集合となることを示せば十分である．

いま，$s \in \Gamma^r(\xi)$，ε を正数とする．s の局所表現を $s^{(i)}: \tilde{U}_i \to F_i$ すなわち $s^{(i)}(x) = h_{ix} s(x)$，$x \in \tilde{U}_i$ とする．すると，$s^{(i)} \alpha_i^{-1} | \bar{U}_i \in \mathcal{BC}^r(\alpha_i(\bar{U}_i)\,;F_i) = \mathcal{BC}^r(Q(b_i)\,;F_i)$ で，N_i が $\mathcal{BC}^r(Q(b_i)\,;F_i)$ で稠密だから，適当な $p_i \in N_i$ があって，$\|(s^{(i)} \alpha_i^{-1} - p_i) | \alpha_i(\bar{U}_i)\|_r < \varepsilon$ となる．

いま，C^r 断面 $s': B \to E$ を $s' = s_{p_1} + \cdots + s_{p_m}$ と定義すると，$s' \in N$ である．そして，第6章§1の命題2, 5などから，定理1の証明と同様に，適当な定数 K があって $\|s - s'\|_r \leqq K\varepsilon$ が成立することがわかる．したがって，N は $\Gamma^r(\xi)$ の中で稠密である．▌

命題 5 $\xi = (E, B, \pi)$ を C^∞ ベクトル束，B をコンパクト C^∞ 多様体とする．すると

$$\Gamma^0(\xi) \supset \Gamma^1(\xi) \supset \cdots \supset \Gamma^r(\xi) \supset \Gamma^{r+1}(\xi) \supset \cdots \supset \Gamma^\infty(\xi)$$

であって，包含写像 $i: \Gamma^{r+1}(\xi) \to \Gamma^r(\xi)$ は連続線型写像である．そして $\Gamma^{r+1}(\xi)$ は $\Gamma^r(\xi)$ で稠密である．

また $\Gamma^\infty(\xi)$ も $\Gamma^r(\xi)$ で稠密となる．

証明 $\mathcal{U}$ を命題2の条件をみたす ξ の C^∞ 束座標近傍系とすると，定義から $\|s\|_r^{\mathcal{U}} \leqq \|s\|_{r+1}^{\mathcal{U}}$，$s \in \Gamma^{r+1}(\xi)$ となる．したがって，$i: \Gamma^{r+1}(\xi) \to \Gamma^r(\xi)$ は連続線型写像である．

B はコンパクト C^∞ 多様体だから，定理2の証明の中の1の分解 $\{\psi_1, \cdots, \psi_m\}$ を C^∞ 級にとることができる．したがって，$\Gamma^r(\xi)$ の稠密な可算集合 N は C^∞ 断面からなるものとしてよい．すると，$N \subset \Gamma^\infty(\xi) \subset \Gamma^{r+1}(\xi) \subset \Gamma^r(\xi)$ で，N が $\Gamma^r(\xi)$ で稠密だから，$\Gamma^\infty(\xi), \Gamma^{r+1}(\xi)$ は $\Gamma^r(\xi)$ で稠密である．▮

定理 3　M をコンパクト C^∞ 多様体とする．M の上の C^r ベクトル場全体の集合を $\mathscr{X}^r(M)$ とすると，これは可分な Banach 空間の構造をもつ．そして，この位相ベクトル空間としての構造は M だけに依存して定まる．

また，

$$\mathscr{X}^0(M) \supset \mathscr{X}^1(M) \supset \cdots \supset \mathscr{X}^r(M) \supset \mathscr{X}^{r+1}(M) \supset \cdots \supset \mathscr{X}^\infty(M)$$

であって，包含写像 $i: \mathscr{X}^{r+1}(M) \to \mathscr{X}^r(M)$ は連続線型写像で，$\mathscr{X}^{r+1}(M)$ は $\mathscr{X}^r(M)$ の中で稠密である．また，$\mathscr{X}^\infty(M)$ も $\mathscr{X}^r(M)$ で稠密となる．

証明　M はコンパクト C^∞ 多様体だから，有限次元で，その接ベクトル束 $\tau(M)$ は各ファイバーが有限次元の C^∞ ベクトル束となる．そして，その底空間 M はコンパクト C^∞ 多様体である．

また，定義から $\mathscr{X}^r(M) = \Gamma^r(\tau(M))$ である．したがって，定理1, 2 と命題5によって，定理3が成立する．▮

$\xi = (E, B, \pi)$ を C^0 ベクトル束とし，その底空間 B をコンパクト Hausdorff 空間とする．このとき $\Gamma^0(\xi)$ に別の方法でノルムを入れることにする．

ξ の全空間 E の上の連続関数 $\varphi: E \to \boldsymbol{R}$ がある．いま φ を各ファイバー $E_x, x \in B$ の上に制限した写像 $\varphi|E_x: E_x \to \boldsymbol{R}$ が E_x のノルムと同値なノルムであるとき，φ を ξ の **Finsler 構造**という．これから，$\varphi(v) = \|v\|_\varphi$, $v \in E$ と書く．

命題 6　$\xi = (E, B, \pi)$ を C^0 ベクトル束，B をパラコンパクトとする．すると，ξ は Finsler 構造をもつ．

証明　$\mathcal{U} = \{(U_\lambda, F_\lambda, h_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$ を ξ の C^0 束座標近傍系とする．すると，$\{U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ は B の開被覆で，B はパラコンパクトだから，$\{U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ に属する1の分解 $\{f_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ が存在する(第2章§7定理9)．

いま，$p_2: U_\lambda \times F_\lambda \to F_\lambda$ を第2成分への射影とし，$\|\cdot\|_\lambda: F_\lambda \to \boldsymbol{R}$ を，F_λ のノ

ルム $\|\cdot\|_\lambda$ によって定まる連続写像とする．そして，つぎの写像の合成を φ_λ: $\pi^{-1}(U_\lambda)\to \boldsymbol{R}$ とする．

$$\pi^{-1}(U_\lambda)\xrightarrow{h_\lambda} U_\lambda\times F_\lambda \xrightarrow{p_2} F_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|_\lambda} \boldsymbol{R}$$

すると，$v\in E_x(x\in U_\lambda)$ として，$\varphi_\lambda(v)=\|h_{\lambda x}(v)\|_\lambda$ で，$h_{\lambda x}: E_x\to F_\lambda$ は線型同相写像だから，$\varphi_\lambda|E_x$ は E_x のノルムと同値なノルムである．

いま，$\varphi: E\to \boldsymbol{R}$ を $\varphi(v)=\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(\pi(v))\varphi_\lambda(v)$, $v\in E$ とおくと，これはうまく定義できて，連続となる．そして，この φ が ξ の Finsler 構造となることは，容易に確かめることができる．▮

いま，$\xi=(E, B, \pi)$ が C^0 ベクトル束で，その底空間 B はコンパクト Hausdorff 空間とする．コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクトだから，命題 6 により，ξ に Finsler 構造 $\varphi: E\to \boldsymbol{R}$ が存在する．以下，$v\in E$ にたいして，$\varphi(v)=\|v\|_\varphi$ と表わすことにする．

いま，$s: B\to E$ を ξ の C^0 断面とする．すると，$\varphi s: B\to \boldsymbol{R}$ は連続で，B はコンパクトだから，φs の最大値が存在する．これを $\|s\|_\varphi$ とおく．すると，$\|s\|_\varphi=\sup\{\|s(x)\|_\varphi;\ x\in B\}$ である．

命題 7 $\xi=(E, B, \pi)$ を C^0 ベクトル束，B をコンパクト Hausdorff 空間，$\varphi: E\to \boldsymbol{R}$ を ξ の Finsler 構造とする．いま，$s\in \Gamma^0(\xi)$ にたいして，$\|s\|_\varphi=\sup\{\|s(x)\|_\varphi;\ x\in B\}$ と定義すると，これは $\Gamma^0(\xi)$ のノルムである．

そして，ξ の各ファイバーが有限次元なら，このノルムは定理 1 のノルムと同値である．

証明 $\|s\|_\varphi$ が $\Gamma^0(\xi)$ のノルムとなることはすぐわかる．そこで，ξ の各ファイバーは有限次元とする．

命題 2 の条件をみたす ξ の C^0 束座標近傍系を $\mathcal{U}=\{(U_i, F_i, h_i);\ i=1, \cdots, m\}$ とする．F_i は有限次元だから，その単位球面 $S_i=\{y\in F_i;\ \|y\|=1\}$ はコンパクトである．

$x\in \tilde{U}_i$ に対して，$h_{ix}: E_x\to F_i$ は線型同相写像だから，$\varphi h_{ix}{}^{-1}: F_i\to \boldsymbol{R}$ は F_i のノルムと同値である．したがって，$v\neq 0$ なら，$\varphi h_{ix}{}^{-1}(v)=\|h_{ix}{}^{-1}(v)\|_\varphi\neq 0$ となる．

U_i の閉包 $\bar{U}_i$ はコンパクトだから，$\bar{U}_i \times S_i$ もコンパクトである．したがって，$\varphi h_i^{-1}|\bar{U}_i \times S_i : \bar{U}_i \times S_i \to \boldsymbol{R}$ は最大値 b_i および最小値 a_i をもつ．そして，$v \neq 0$ なら $\varphi h_i^{-1}(x, v) = \varphi h_{ix}^{-1}(v) \neq 0$ となることから，$0 < a_i \leqq b_i$ となる．

すると，任意の $v \in F_i$，$x \in \bar{U}_i$ に対して

$$(*)\quad a_i \|h_{ix}^{-1}(v)\|_\varphi \leqq \|v\| \leqq b_i \|h_{ix}^{-1}(v)\|_\varphi$$

が成立する．

$s \in \Gamma^0(\xi)$ に対して，$s^{(i)} : \tilde{U}_i \to F_i$ を $s^{(i)}(x) = h_{ix} s(x)$，$x \in \tilde{U}_i$ と定義すると，$\|s^{(i)}|U_i\|_0 = \sup\{\|s^{(i)}(x)\| ;\ x \in U_i\}$ は有限で，$\|s\|_0^{\mathcal{U}} = \max\{\|s^{(i)}|U_i\|_0 ;\ i = 1, \cdots, m\}$ である．

したがって(＊)式から

$$a_i \sup\{\|s(x)\|_\varphi ;\ x \in U_i\} \leqq \|s^{(i)}|U_i\|_0 \leqq b_i \sup\{\|s(x)\|_\varphi ;\ x \in U_i\}$$

が成立する．そこで，$a = \min\{a_1, \cdots, a_m\}$，$b = \max\{b_1, \cdots, b_m\}$ とすると，$a > 0$，$b > 0$ であって

$$a\|s\|_\varphi \leqq \|s\|_0^{\mathcal{U}} \leqq b\|s\|_\varphi$$

が成立する．∎

上の命題と定理1から，つぎの系は明らかである．

系　$\xi = (E, B, \pi)$ を C^0 ベクトル束，B をコンパクト Hausdorff 空間とする．ξ の各ファイバーが有限次元のとき φ_1, φ_2 を ξ の2つの Finsler 構造とすると，これらの定める $\Gamma^0(\xi)$ の2つのノルム $\|\cdot\|_{\varphi_1}, \|\cdot\|_{\varphi_2}$ は同値である．

この系は，つぎの命題からもわかる．

命題 8　$\xi = (E, B, \pi)$ を C^0 ベクトル束，B をコンパクト Hausdorff 空間とし，ξ の各ファイバーは有限次元とする．いま，$\varphi_1, \varphi_2 : E \to \boldsymbol{R}$ を ξ の2つの Finsler 構造とすると，適当な正数 a, b があって

$$a\|w\|_{\varphi_2} \leqq \|w\|_{\varphi_1} \leqq b\|w\|_{\varphi_2}, \qquad w \in E$$

が成立する．

証明　φ_1, φ_2 に関する命題7の証明の(＊)式から，適当な正数 a_i, a_i', b_i, b_i' があって，$w \in E_x$，$x \in \bar{U}_i$ に対して

$$a_i\|w\|_{\varphi_1} \leqq \|h_{ix}(w)\| \leqq b_i\|w\|_{\varphi_1},$$

$$a_i'\|w\|_{\varphi_2} \leqq \|h_{ix}(w)\| \leqq b_i'\|w\|_{\varphi_2}$$

が成立する．いま $b=\max\{b_i'/a_i;\ i=1,\cdots,m\}$，$a=\min\{a_i'/b_i;\ i=1,\cdots,m\}$ とおくと，上の2つの不等式から，すべての $w\in E$ に対して $a\|w\|_{\varphi_2}\leqq\|w\|_{\varphi_1}\leqq b\|w\|_{\varphi_2}$ が成り立つ．▮

M, N をコンパクト C^r 多様体とする．いま，M から N への C^r 写像全体の集合を $\mathscr{C}^r(M, N)$ とする．これに C^r 位相と呼ばれる位相構造を定義しよう（これから $r\geqq 1$ と仮定する）．

一般に，コンパクト C^r 多様体 M の C^r 座標近傍系 $\{(U_i, \alpha_i);\ i=1,\cdots,m\}$ が**良い C^r 座標近傍系**であるとは，U_i の閉包 $\bar{U}_i$ を含む M の適当な開集合 $\tilde{U}_i$ があって，(U_i, α_i) は $\tilde{U}_i$ を定義域とする M の C^r 座標近傍 $(\tilde{U}_i, \alpha_i)$ に拡張できるときをいう（ここで α_i の拡張も同じ α_i で表わした）．

命題2と同様にして，コンパクト C^r 多様体は良い C^r 座標近傍系をもつことがわかる．さらに，つぎの命題が成立する．

命題 9 M, N をコンパクト C^r 多様体，$f: M\to N$ を C^r 写像，$\mathscr{V}=\{(V_j, B_j);\ j=1,\cdots l\}$ を N の良い C^r 座標近傍系とする．このとき M の適当な良い C^r 座標近傍系 $\mathscr{U}=\{(U_i, \alpha_i);\ i=1,\cdots,m\}$ があって，各 i に対して適当な j をとると，$f(\bar{U}_i)\subset V_j$ が成立する．

証明 M の各点 x に対して，$f(x)$ を含む N の C^r 座標近傍 (V_j, β_j) が存在する．f は連続だから，$f^{-1}(V_j)$ は x の開近傍となる．いま，x を含む M の C^r 座標近傍 $(\tilde{U}^x, \alpha^x)$ を十分小さくとって，$\tilde{U}^x\subset f^{-1}(V_j)$，すなわち $f(\tilde{U}^x)\subset V_j$ が成立するようにする．そして，x を含む開集合 U^x を，$\bar{U}^x\subset\tilde{U}_x$ となるようにとる．すると，$f(\bar{U}^x)\subset V_j$ となる．

$\{U^x;\ x\in M\}$ は M の開被覆で，M はコンパクトだから，この有限部分被覆が存在する．これを $\{U^{x_1},\cdots,U^{x_m}\}$ とし，これに対応する M の C^r 座標近傍系を $\mathscr{U}=\{(U_1, \alpha_1),\cdots,(U_m, \alpha_m);\ i=1,\cdots,m\}$ とすれば，これが求めるものである．▮

M, N をコンパクト C^r 多様体とする．C^r 写像 $f: M\to N$ と，M, N の良い C^r 座標近傍系 $\mathscr{U}=\{(U_i, \alpha_i);\ i=1,\cdots,m\}$，$\mathscr{V}=\{(V_j, \beta_j);\ j=1,\cdots,l\}$，およ

び写像 $j: \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, l\}$ があって，$f(\bar{U}_i) \subset V_{j(i)}$，$i=1, \cdots, m$ が成立しているものとする．このとき，ε を正数として，つぎの2つの条件をみたす C^r 写像 $g: M \to N$ 全体の集合を $\mathcal{B}_\varepsilon{}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ と定義する．

(1)　$g(\bar{U}_i) \subset V_{j(i)}$,　　$i = 1, \cdots, m$

(2)　$\|\beta_{j(i)} g \alpha_i{}^{-1} - \beta_{j(i)} f \alpha_i{}^{-1}\|_r < \varepsilon$，$i=1, \cdots, m$．ここで，$\|\cdot\|_r$ は $\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i); F_{j(i)})$ の r ノルムである．ただし，$F_{j(i)}$ は $\beta_{j(i)}$ に対する Banach 空間とする．

このような $\mathcal{B}_\varepsilon{}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ 全体の集合から生成される位相を，$\mathcal{C}^r(M, N)$ の **C^r 位相**という．

M, N を C^r 多様体，$f: M \to N$ を C^r 写像とする．いま，M の各点 x に対して，適当な x の近傍 U が存在して，$f(U)$ が $f(x)$ の近傍となり，$f|U: U \to f(U)$ が C^r 微分同相写像となるとき，f を**局所 C^r 微分同相写像**という．

定義から，直ちに，局所 C^r 微分同相写像 $f: M \to N$ は開写像(すなわち，M の任意の開集合 O に対して $f(O)$ は N の開集合)となることがわかる．したがって，特に，$f(M)$ は N の開集合となる．

補題 4　C^r 写像 $f: M \to N$ が局所 C^r 微分同相写像となるための必要十分条件は，M の各点 x における f の微分 $T_x f: T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$ が線型同相写像となることである．

証明　必要性は定義からすぐわかる．また，十分性は，逆関数の定理を使えばよい．∎

命題 10　M, N をコンパクト C^r 多様体，$f: M \to N$ を局所 C^r 微分同相写像とする．このとき，f の $\mathcal{C}^r(M, N)$ における適当な近傍 $\mathcal{N} = \mathcal{B}_\varepsilon{}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ をとると，$\mathcal{N}$ の各元は局所 C^r 微分同相写像となる．

この命題から，つぎの系は明らかである．

系　M, N をコンパクト C^r 多様体とすると，M から N への局所 C^r 微分同相写像全体の集合は $\mathcal{C}^r(M, N)$ の開集合である．

命題 10 の証明　$f: M \to N$ を局所 C^r 微分同相写像とする．命題9から M, N の良い C^r 座標近傍系 $\mathcal{U} = \{(U_i, \alpha_i);\ i=1, \cdots, m\}$，$\mathcal{V} = \{(V_j, \beta_j);\ j=1, \cdots, l\}$，および写像 $j: \{1, \cdots, m\} \to \{1, \cdots, l\}$ があって $f(\bar{U}_i) \subset V_{j(i)}$，$i=1, \cdots, m$ が成立

する．

仮定から，各 $x \in M$ に対して，$T_x f : T_x(M) \to T_{f(x)}(N)$ は線型同相写像である．したがって，α_i に対する Banach 空間を E_i，β_j に対する Banach 空間を F_j とすると，各 $x \in \bar{U}_i$ に対して，$D(\beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1})(x) : E_i \to F_{j(i)}$ は線型同相写像である．すなわち，$D(\beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1})(x) \in \mathrm{Iso}\,(E_i ; F_{j(i)})$ である．

f は C^r 級$(r \geqq 1)$だから，$D(\beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1}) : \alpha_i(\bar{U}_i) \to \mathscr{L}(E_i ; F_{j(i)})$ は連続．そして $\alpha_i(\bar{U}_i)$ はコンパクトだから，$A_i = D(\beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1})(\alpha_i(\bar{U}_i))$ は $\mathrm{Iso}\,(E_i ; F_{j(i)})$ に含まれるコンパクト集合である．第4章§1命題12により，$\mathrm{Iso}\,(E_i ; F_{j(i)})$ は $\mathscr{L}(E_i ; F_{j(i)})$ の開集合だから，A_i と $\mathrm{Iso}\,(E_i ; F_{j(i)})$ の補集合との間の距離は正となる(第6章§1補題1の証明)．これを ε_i とする．いま，$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$ とすると $\varepsilon > 0$ である．いま，$\mathscr{N} = \mathscr{B}_\varepsilon^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, f)$ とおくと，これが命題の条件をみたすことを示そう．

$g \in \mathscr{B}_\varepsilon^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, f)$ とすると，各 i に対して，$g(\bar{U}_i) \subset V_{j(i)}$ であり，$\alpha_i(U_i)$ 上で $\|\beta_{j(i)} g \alpha_i^{-1} - \beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1}\|_r < \varepsilon$ となる．したがって，$x \in \alpha_i(U_i)$ とすると，$\|D(\beta_{j(i)} g \alpha_i^{-1})(x) - D(\beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1})(x)\| < \varepsilon$ となる．$D(\beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1})(x) \in A_i$ だから，$\varepsilon \leqq \varepsilon_i$ に注意すると，$D(\beta_{j(i)} g \alpha_i^{-1})(x) \in \mathrm{Iso}\,(E_i ; F_{j(i)})$ となる．すなわち，$T_x g : T_x(M) \to T_{g(x)}(N)$ は線型同相写像である．▌

つぎの定理のための補題を2つ用意しよう．

補題 5 コンパクト C^r 多様体の(連結)成分は有限個である．そして，各成分はコンパクトで連結な C^r 多様体である．

証明 M をコンパクト C^r 多様体とする．M の各点に対して，Banach 空間の開球と同相な開近傍が存在する．Banach 空間の開球は凸集合であるから弧状連結，したがって連結となる．

以上から，M の連結成分 C の各点 x に対し，適当な x の開近傍 U をとると，$U \subset C$ となることがわかる．したがって，C は開集合である．

ゆえに，M の連結成分全体の集合は M の開被覆となる．M はコンパクトだから，有限個の連結成分で M は覆われる．しかるに，連結成分は互いに交わらないから，M の連結成分の個数は有限個である．

以上で，M の連結成分は有限個で，各成分は開集合，すなわち M の開部分多様体であることがわかった．したがって，各成分は C^r 多様体である．また，一般に，成分は閉集合であるから，コンパクトな M の部分集合として，コンパクトとなる．▌

補題 6 E, F を有限次元 Banach 空間，V を E の凸開集合で，$\bar{V}$ はコンパクトとする．そして，W を $\bar{V}$ を含む E の開集合とする．いま，$f: W \to F$ が C^r 級で，各 $x \in \bar{V}$ に対して，$Df(x): E \to F$ が線型同相写像とする．

このとき，適当な正数 a, δ があって

$$x, y \in \bar{V},\ \|x-y\| < \delta \quad ならば \quad \|f(x)-f(y)\| \geqq a\|x-y\|$$

が成り立つ．

証明 仮定から，$x \in \bar{V}$ に対して $\|\{Df(x)\}^{-1}\|^{-1}$ を対応させる写像は連続である(実は C^{r-1} 級)．$\bar{V}$ はコンパクトだから，その最小値が存在する．これを $2a$ とすると，$a>0$ である．すなわち，$\|\{Df(x)\}^{-1}\|^{-1} \geqq 2a,\ x \in \bar{V}$ となる．

つぎに，$Df: \bar{V} \to \mathscr{L}(E; F)$ は連続で，$\bar{V}$ はコンパクトだから，Df は一様連続である．したがって，適当な正数 δ があって

$$x, y \in \bar{V},\ \|x-y\| < \delta \quad ならば \quad \|Df(x)-Df(y)\| < a$$

となる．ゆえに第5章§1定理3から，

$$\|x-y\| < \delta \quad ならば \quad \|f(x)-f(y)-Df(y)(x-y)\| \leqq a\|x-y\|$$

となる．

上の不等式と，第6章§3補題1，三角不等式から，

$$\|x-y\| < \delta,\ x, y \in \bar{V} \quad ならば$$

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &\geqq \|Df(y)(x-y)\| - \|f(x)-f(y)-Df(y)(x-y)\| \\ &\geqq \|\{Df(y)\}^{-1}\|^{-1}\|x-y\| - a\|x-y\| \\ &\geqq 2a\|x-y\| - a\|x-y\| = a\|x-y\|.\end{aligned}$$

▌

定理 4 M, N をコンパクト C^r 多様体，$f: M \to N$ を C^r 微分同相写像とする．このとき，f の $\mathscr{C}^r(M, N)$ における適当な近傍 $\mathscr{N}$ が存在して，$\mathscr{N}$ の各元は C^r 微分同相写像となる．

したがって，M から N への C^r 微分同相写像全体の集合を $\mathrm{Diff}^r(M, N)$ と

すると，これは $\mathscr{C}^r(M, N)$ の開集合である．

証明 後半は前半から明らかであるから，前半だけを示せばよい．

$f: M \to N$ を C^r 微分同相写像とする．すると，M, N の連結成分の個数は一致し，f を M の1つの成分の上に制限したものは，N のある成分の上への C^r 微分同相写像となる．したがって，M, N がともに連結な場合に証明すれば十分である．そこで，M, N は連結と仮定しよう．

f は局所 C^r 微分同相写像でもあるから，命題10の条件をみたす f の近傍 $\mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ が存在する．以下，命題10の証明と同じ記号を使うことにする．

$g \in \mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ とすると，g は局所 C^r 微分同相写像となり，g は開写像である．したがって，特に，$g(M)$ は N の開集合である．また，M はコンパクトだから $g(M)$ はコンパクトである．したがって，N の閉集合である．N は連結で，$g(M) \neq \phi$ だから，$g(M) = N$ となる．すなわち，g は全射である．

つぎに，ε を十分小さくとると，$\mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ の各元は単射となることを証明しよう．

もしこれが成立しないとすると，任意の自然数 n に対して，適当な $\mathcal{B}_{1/n}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ の元 g_n と，M の相異なる2点 x_n, y_n があって，$g_n(x_n) = g_n(y_n)$ となる．

M, N はコンパクトだから，適当に距離を入れて距離空間と考えてよい(§4補題1)．

M はコンパクトだから，M の点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の適当な部分列 $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}$ をとって，どちらも収束するようにできる．そこで，$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$, $y_0 = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$ とする．

一方，$g_n \in \mathcal{B}_{1/n}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ から，各 i に対して $\alpha_i(U_i)$ 上で

(1) $\lim_{n\to\infty} \|\beta_{j(i)} g_n \alpha_i^{-1} - \beta_{j(i)} f \alpha_i^{-1}\|_r = 0$ となる．

ここで，簡単のため $\{x_{n_k}\}, \{y_{n_k}\}, \{g_{n_k}\}$ をあらためて，$\{x_n\}, \{y_n\}, \{g_n\}$ と書くことにすると，以上の議論から，(1)式が成立し，さらに

(2) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, $x_n \neq y_n$, $g_n(x_n) = g_n(y_n)$ となる．そして(1)

から，$\{\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}\}$ は $\alpha_i(U_i)$ 上で $\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}$ に一様収束することがわかる．

いま，$x_0\in U_i$ とすると，(2)から，十分大きな n に対して，$x_n\in U_i$ となる．したがって，$\{\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}\}$ が $\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}$ に一様収束することと合わせて，$\lim_{n\to\infty}\beta_{j(i)}g_n(x_n)=\beta_{j(i)}f(x_0)$ となることがわかる．$\beta_{j(i)}$ は同相写像だから，これは $\lim_{n\to\infty}g_n(x_n)=f(x_0)$ を意味する．

同様にして $\lim_{n\to\infty}g_n(y_n)=f(y_0)$ となるが，$g_n(x_n)=g_n(y_n)$ であるから，$f(x_0)=f(y_0)$ となる．そして，仮定から f は単射であるから，$x_0=y_0$ となる．

$\alpha_i(U_i)$ は $\alpha_i(x_0)$ を含む開集合だから，$\alpha_i(x_0)$ を中心とする十分小さな半径の開球 V をとると，その閉包 $\bar{V}$ も $\alpha_i(U_i)$ に含まれる．

f は C^r 微分同相写像だから，$\tilde{f}=\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}:\alpha_i(U_i)\to\beta_{j(i)}(V_j)$ は C^r 写像で，各 $x\in\bar{V}$ に対して $D\tilde{f}(x)$ は線型同相写像である．したがって，補題6から適当な正数 a,δ があって

(3)　$x,y\in\bar{V},\ \|x-y\|<\delta$　ならば　$\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|\geqq a\|x-y\|$

が成立する．

いま，$\tilde{g}_n=\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}:\alpha_i(U_i)\to\beta_{j(i)}(V_j)$ とおくと，(1)式から，十分大きな n に対して，$\alpha_i(U_i)$ 上で $\|D\tilde{g}_n-D\tilde{f}\|\leqq a/2$ とできる．すると，平均値の定理から，十分大きな n に対して

(4)　$x,y\in\bar{V}$　ならば　$\|(\tilde{f}(x)-\tilde{g}_n(x))-(\tilde{f}(y)-\tilde{g}_n(y))\|\leqq(a/2)\|x-y\|$

が成立する．

(3)，(4)から，$x,y\in\bar{V},\|x-y\|<\delta$ とすると，十分大きな n に対して

$$\begin{aligned}\|\tilde{g}_n(x)-\tilde{g}_n(y)\| &\geqq \|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\|-\|(\tilde{f}(x)-\tilde{g}_n(x))-(\tilde{f}(y)-\tilde{g}_n(y))\|\\ &\geqq a\|x-y\|-(a/2)\|x-y\|\geqq(a/2)\|x-y\|\end{aligned}$$

となる．すなわち，十分大きな n に対して

(5)　$x,y\in\bar{V},\ \|x-y\|<\delta$　ならば　$\|\tilde{g}_n(x)-\tilde{g}_n(y)\|\geqq(a/2)\|x-y\|$

が成立する．

一方，(2)式と $x_0=y_0$ から，点列 $\{\alpha_i(x_n)\},\{\alpha_i(y_n)\}$ はおなじ点 $\alpha_i(x_0)\in V$ に収束する．したがって，十分大きな n に対して，$\alpha_i(x_n),\alpha_i(y_n)\in V$ で，$\lim_{n\to\infty}\|\alpha_i(x_n)-\alpha_i(y_n)\|=0$ となる．さらに，α_i が単射であることに注意すると，

(2)から，$\alpha_i(x_n)\neq\alpha_i(y_n)$で，さらに(2)から，$\tilde{g}_n(\alpha_i(x_n))=\tilde{g}_n(\alpha_i(y_n))$となる．すなわち，十分大きな n に対して

(6) $\alpha_i(x_n),\alpha_i(y_n)\in V$ で $\|\alpha_i(x_n)-\alpha_i(y_n)\|<\delta$ となり，

さらに，$\tilde{g}_n(\alpha_i(x_n))=\tilde{g}_n(\alpha_i(y_n))$

が成立する．これは明らかに(5)と矛盾する．

以上で，十分小さな正数 ε に対して $\mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,f)$ の各元は単射となることがわかった．したがって，初めに示したことと合わせて，十分小さな正数 ε に対して，$\mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,f)$ の各元は局所 C^r 微分同相写像で，かつ全単射となる．

しかるに，局所 C^r 微分同相写像で全単射となるものは C^r 微分同相写像であるから，$\mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,f)$ の各元は，十分小さな正数 ε に対して，C^r 微分同相写像である．▌

つぎに，$\mathcal{C}^r(M,N)$ の C^r 位相をもう少し詳しくしらべて，これが Baire 空間となることを証明しよう．このための準備として，つぎの補題と，その系を示すことにする．

M,N をコンパクト C^r 多様体とし，$f:M\to N$ を C^r 写像，$\mathcal{U}=\{(U_i,\alpha_i);\ i=1,\cdots,m\}$，$\mathcal{V}=\{(V_j,\beta_j);\ j=1,\cdots,l\}$ を M,N の良い C^r 座標系とする．写像 $j:\{1,\cdots,m\}\to\{1,\cdots,l\}$ に対して，$f(\bar{U}_i)\subset V_{j(i)}$，$i=1,\cdots,m$ が成立しているものとする．

いま，$(U,\alpha),(V,\beta)$ を M,N の C^r 座標近傍で，これらは $\bar{U},\bar{V}$ を含む M,N の適当な開集合 $\tilde{U},\tilde{V}$ の上の C^r 座標近傍 $(\tilde{U},\alpha),(\tilde{V},\beta)$ まで拡張できるものとする．そして $\alpha_i,\beta_j,\alpha,\beta$ に対する Banach 空間を，それぞれ E_i,F_j,E,F とする．

以上の仮定と記号のもとで，つぎの補題が成立する．

補題 7 $g:M\to N$ を C^r 写像，h を $\mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,f)$ の元とする．いま，$g(\bar{U})\subset V$，$h(\bar{U})\subset V$ で，ある正数 ε' に対して，$\alpha(U)$ 上で $\|\beta g\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}\|_r<\varepsilon'$ が成立するものとする．

このとき，適当な正数 δ があって，$\mathcal{B}_\delta^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,h)\subset\mathcal{B}_\varepsilon^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,f)$ であって，さらに，$k\in\mathcal{B}_\delta^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,h)$ ならば

$$h(\bar{U})\subset V \quad で \qquad \alpha(U)上で\ \|\beta k\alpha^{-1}-\beta g\alpha^{-1}\|_r<\varepsilon'$$

となる．

この補題の証明の前に，応用として，つぎの4つの系を述べる．

系 1　$\mathscr{C}^r(M, N)$ の2つの開集合 $\mathscr{N}_1, \mathscr{N}_2$ を $\mathscr{N}_1=\mathscr{B}_{\varepsilon_1}{}^r(\mathscr{U}^{(1)}, \mathscr{V}^{(1)}, j^{(1)}, f)$，$\mathscr{N}_2=\beta_{\varepsilon_2}{}^r(\mathscr{U}^{(2)}, \mathscr{V}^{(2)}, j^{(2)}, g)$ とする．このとき，任意の $h\in\mathscr{N}_1\cap\mathscr{N}_2$ に対して，適当な正数 δ があって $\mathscr{B}_\delta{}^r(\mathscr{U}^{(1)}, \mathscr{V}^{(1)}, j^{(1)}, h)\subset\mathscr{N}_1\cap\mathscr{N}_2$ となる．

証明　補題7から帰納法によって証明できる．▌

系 2　$\mathscr{N}_t=\mathscr{B}_{\varepsilon_t}{}^r(\mathscr{U}^{(t)}, \mathscr{V}^{(t)}, j^{(t)}, f^{(t)})$，$t=1, \cdots, s$ とすると，$\bigcap_{t=1}^{s}\mathscr{N}_t$ の任意の元 h に対して，適当な正数 δ があって，$\mathscr{B}_\delta{}^r(\mathscr{U}^{(1)}, \mathscr{V}^{(1)}, j^{(1)}, h)\subset\bigcap_{t=1}^{s}\mathscr{N}_t$ となる．

証明　系1から帰納法によって明らかである．▌

系 3　$\mathscr{B}_\varepsilon{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, f)$ の形の集合全体は，$\mathscr{C}^r(M, N)$ の C^r 位相の基底である．すなわち，$\mathscr{C}^r(M, N)$ の任意の開集合は，$\mathscr{B}_\varepsilon{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, f)$ の形の集合の和集合として表わされる．

証明　系2と C^r 位相の定義からすぐわかる．▌

系 4　$\mathscr{N}=\mathscr{B}_\varepsilon{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, f)$ の2元 g_1, g_2 に対して

$$d_r(g_1, g_2)=\max\{\|\beta_{j(i)}g_1\alpha_i{}^{-1}-\beta_{j(i)}g_2\alpha_i{}^{-1}\|_r;\ i=1, \cdots, m\}$$

(ただし $\|\cdot\|_r$ は $\mathscr{B}\mathscr{C}^r(\alpha_i(U_i); F_{j(i)})$ の r ノルム) とおくと，d_r は $\mathscr{N}$ の距離となる．そして，この距離から自然にひき起こされる $\mathscr{N}$ の位相は，$\mathscr{N}$ の $\mathscr{C}^r(M, N)$ における相対位相と一致する．

証明　d_r が $\mathscr{N}$ の距離となることは定義からすぐわかる．

つぎに，系4と系1から，$\mathscr{N}$ の開集合 (相対位相) は $\mathscr{N}\cap\mathscr{B}_\varepsilon{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, h)$，$h\in\mathscr{N}$ の形の集合の和集合として表わされる．しかるに，$\mathscr{N}\cap\mathscr{B}_\varepsilon{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, h)$ は，$\mathscr{N}$ の距離 d_r による h を中心とした半径 ε の開球である．このことから，系4は明らかである．▌

補題7の証明　系4の記号を用いることにすると，仮定から $d_r(f, h)<\varepsilon$ となる．したがって，$\delta_0=\varepsilon-d_r(f, h)$ とおくと，$\delta_0>0$ であって，$0<\delta\leqq\delta_0$ となる任意の δ に対して，$\mathscr{B}_\delta{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, h)\subset\mathscr{B}_\varepsilon{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, f)$ となる．

$h(\bar{U})\subset V$ と $h\in\mathscr{B}_\varepsilon{}^r(\mathscr{U}, \mathscr{V}, j, f)$ から，各 i に対して，$h(\bar{U}\cap\bar{U}_i)\subset V\cap V_{j(i)}$

となる．したがって，$\beta_{j(i)}h(\bar{U}\cap\bar{U}_i)\subset\beta_{j(i)}(V\cap V_{j(i)})$ となる．$\beta_{j(i)}h(\bar{U}\cap\bar{U}_i)$ はコンパクトで，$\beta_{j(i)}(V\cap V_{j(i)})$はこれを含む開集合だから，$\beta_{j(i)}h(\bar{U}\cap\bar{U}_i)$ と $\beta_{j(i)}(V\cap V_{j(i)})$の補集合の間の距離は正である．これを δ_i とする．

いま，$0<\delta<\min\{\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_m\}$ とすると，$\mathcal{B}_\delta{}^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,h)$の任意の元 k に対して，$k(\bar{U})\subset V$ となることを示そう．

$k(\bar{U}_i)\subset V_{j(i)}$ から，$\beta_{j(i)}k(\bar{U}\cap\bar{U}_i)\subset\beta_{j(i)}(V_{j(i)})$ となるが，$\alpha_i(U_i)$ 上で，$\|\beta_{j(i)}k\alpha_i{}^{-1}-\beta_{j(i)}h\alpha_i{}^{-1}\|_r<\delta$ である．一般に，定義から，$\alpha_i(U_i)$ 上の r ノルム $\|\cdot\|_r$ と $\alpha_i(\bar{U}_i)=\overline{\alpha_i(U_i)}$ 上の r ノルム $\|\cdot\|_r$ とは一致するので，$\alpha_i(\bar{U}_i)$ 上でも

$$\|\beta_{j(i)}k\alpha_i{}^{-1}-\beta_{j(i)}h\alpha_i{}^{-1}\|_r<\delta\leqq\delta_i$$

が成り立つ．したがって，δ_i の定義から $\beta_{j(i)}k(\bar{U}\cap\bar{U}_i)\subset\beta_{j(i)}(V\cap V_{j(i)})$となる．ゆえに，$i$ についての和集合をとることによって，$k(\bar{U})\subset V$ がわかる．

以上から，$0<\delta<\min\{\delta_0,\delta_1,\cdots,\delta_m\}$ ならば，$k\in\mathcal{B}_\delta{}^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,h)$ として，各 i に対して

$$\beta k\alpha^{-1},\beta h\alpha^{-1}:\ \alpha(\bar{U}\cap\bar{U}_i)\to\beta(V\cap V_{j(i)})$$

がうまく定義される．そして

$$\beta k\alpha^{-1}=(\beta\beta_{j(i)}{}^{-1})(\beta_{j(i)}k\alpha_i{}^{-1})(\alpha_i\alpha^{-1}),$$
$$\beta h\alpha^{-1}=(\beta\beta_{j(i)}{}^{-1})(\beta_{j(i)}h\alpha_i{}^{-1})(\alpha_i\alpha^{-1})$$

から

$$\lambda_i=\alpha_i\alpha^{-1}:\ \alpha(U\cap U_i)\to\alpha_i(U\cap U_i),$$
$$\mu_i=\beta\beta_{j(i)}{}^{-1}:\ \beta_{j(i)}(V\cap V_{j(i)})\to\beta(V\cap V_{j(i)}),$$
$$k_i=\beta_{j(i)}k\alpha_i{}^{-1},\ \ h_i=\beta_{j(i)}h\alpha_i{}^{-1}:\ \alpha_i(U\cap U_i)\to\beta_{j(i)}(V\cap V_{j(i)})$$

とおくと

$$\begin{aligned}\beta k\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}&=\mu_ik_i\lambda_i-\mu_ih_i\lambda_i=(\mu_ik_i-\mu_ih_i)\lambda_i\\&=\lambda_i{}^*(\mu_ik_i-\mu_ih_i)=\lambda_i{}^*(\mu_{i*}(k_i)-\mu_{i*}(h_i))\end{aligned}$$

となる．ここで，$\lambda_i{}^*$ は第6章§1補題4による連続線型写像 $\lambda_i{}^*:\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U\cap U_i);G)\to\mathcal{BC}^r(\alpha(U\cap U_i);G)$である．また，$\mu_{i*}$ は第6章§1定理1による連続写像 $\mu_{i*}:\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U\cap U_i);G_{j(i)})\to\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U\cap U_i);G)$である．

したがって，適当な正数 a_i があって，$\alpha(U\cap U_i)$上で

$$\|\beta k\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}\|_r \leqq a_i\|\mu_{i*}(k_i)-\mu_{i*}(h_i)\|_r$$

となる．そして，μ_{i*} の連続性から，任意の正数 ε'' に対して，適当な正数 b_i があって

$$\|k_i-h_i\|_r < b_i \quad ならば \quad \|\mu_{i*}(k_i)-\mu_{i*}(h_i)\|_r < \varepsilon''/a_i$$

とできる．したがって，

$$\|k_i-h_i\|_r < b_i \quad ならば \quad \|\beta k\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}\|_r < \varepsilon''$$

となる．

以上から，δ を $0<\delta<\min\{\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_m, b_1, \cdots, b_m\}$ をみたすようにとると，任意の $k \in \mathcal{B}_\delta{}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, h)$ に対して，$\alpha(U\cap U_i)$ 上で $\|\beta k\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}\|_r<\varepsilon''$，$i=1, \cdots, m$ となる．したがって，

$$\alpha(U)上で \quad \|\beta k\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}\|_r < \varepsilon''$$

となる．

いま，$\varepsilon''=\varepsilon'-\|\beta g\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}\|_r$ とおくと，仮定から ε'' は正数で，この ε'' に対して，上のような正数 δ をとると，$\mathcal{B}_\delta{}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, h)$ に属する任意の k に対して，$\alpha(U)$ 上で

$$\|\beta k\alpha^{-1}-\beta g\alpha^{-1}\|_r \leqq \|\beta k\alpha^{-1}-\beta h\alpha^{-1}\|_r+\|\beta h\alpha^{-1}-\beta g\alpha^{-1}\|_r < \varepsilon'$$

が成立する．▌

定理 5 M, N をコンパクト C^r 多様体とすると，$\mathcal{C}^r(M, N)$ は Baire 空間である．また，$\mathrm{Diff}^r(M, N)$ が空でないなら，$\mathrm{Diff}^r(M, N)$ も Baire 空間である．特に，$\mathrm{Diff}^r(M)=\mathrm{Diff}^r(M, M)$ は Baire 空間である．

証明 Baire 空間の開集合は Baire 空間だから(第2章§8定理7)，$\mathcal{C}^r(M, N)$ が Baire 空間ならば，その空でない開集合 $\mathrm{Diff}^r(M, N)$ は Baire 空間となる(定理4)．したがって，$\mathcal{C}^r(M, N)$ が Baire 空間であることをいえば十分である．

$f: M\to N$ を C^r 写像とし，その $\mathcal{C}^r(M, N)$ における近傍 $\mathcal{B}_\varepsilon{}^r(\mathcal{U}, \mathcal{V}, j, f)$ をとる．これは距離 d_r をもつ(補題7系4)．このとき，十分小さな正数 δ をとって，f を中心とする半径 δ の閉球 B_δ をつくると，これが完備となることを証明しよう．

$f(\bar{U}_i)\subset V_{j(i)}$ であるから，$\beta_{j(i)}f(\bar{U}_i)\subset\beta_{j(i)}(V_{j(i)})$ となる．$\beta_{j(i)}f(\bar{U}_i)$ はコンパクトで，$\beta_{j(i)}(V_{j(i)})$ は開集合だから，$\beta_{j(i)}f(\bar{U}_i)$ と $\beta_{j(i)}(V_{j(i)})$ の補集合の間の距離は正となる．これを δ_i とする．そして，正数 δ を $0<\delta<\min\{\delta_1,\cdots,\delta_m\}$ をみたすようにとる．

いま，$\{g_n\}$ を B_δ の基本列とする．すると，d_r の定義から，各 i に対して，$\{\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}\}$ は $\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i)\,;F_{j(i)})$ の基本列である．$\mathcal{BC}^r(\alpha_i(U_i)\,;F_{j(i)})$ は完備だから，これは収束する．そこで，この極限を $t_i:\alpha_i(U_i)\to F_{j(i)}$ とすると，これは C^r 有界で，$\alpha_i(U_i)$ 上で

(1) $\lim_{n\to\infty}\|\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}-t_i\|_r=0$

が成立する．

したがって，$\|\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}-t_i\|_r\leqq\|\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}-\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}\|_r+\|\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}-t_i\|_r$ と，$d_r(g_n,f)\leqq\delta$ であること，および(1)式から，つぎの式が成立する．

(2) $\|\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}-t_i\|_r\leqq\delta<\delta_i$

一方，M の各点 x に対して，N の点列 $\{g_n(x)\}$ が収束することを示す．

いま，$x\in U_i$ とすると，$\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}(\alpha_i(x))\in\beta_{j(i)}g_n(U_i)\subset\beta_{j(i)}(V_{j(i)})$ となる．そして，(1)から，$n\to\infty$ のとき $\beta_{j(i)}g_n\alpha_i^{-1}(\alpha_i(x))=\beta_{j(i)}g_n(x)\to t_i(\alpha_i(x))$ となる．したがって，$\{g_n(x)\}$ は $\beta_{j(i)}{}^{-1}(t_i(\alpha_i(x)))$ に収束する．

いま，$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$ と書くと，$x\in U_i$ なら $g(x)=\beta_{j(i)}{}^{-1}t_i\alpha_i(x)$ である．したがって，$\alpha_i(U_i)$ 上で $t_i=\beta_{j(i)}g\alpha_i^{-1}$ となり，t_i が C^r 級だから g も C^r 級である．

さらに，$t_i=\beta_{j(i)}g\alpha_i^{-1}$ を(2)式に代入すると

(3) $\alpha_i(U_i)$ 上で $\|\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}-\beta_{j(i)}g\alpha_i^{-1}\|_r\leqq\delta<\delta_i$

となる．しかるに，$\alpha_i(U_i)$ 上のノルム $\|\cdot\|_r$ と $\alpha_i(\bar{U}_i)=\overline{\alpha_i(U_i)}$ 上のノルム $\|\cdot\|_r$ は一致するから

(4) $\alpha_i(\bar{U}_i)$ 上で $\|\beta_{j(i)}f\alpha_i^{-1}-\beta_{j(i)}g\alpha_i^{-1}\|_r\leqq\delta<\delta_i$

となる．

したがって，δ_i の定義から，$\beta_{j(i)}g(\bar{U}_i)=\beta_{j(i)}g\alpha_i^{-1}(\alpha_i(\bar{U}_i))\subset\beta_{j(i)}(V_{j(i)})$ となる．すなわち，$g(\bar{U}_i)\subset V_{j(i)}$ となる．

また，(1)式に $t_i=\beta_{j(i)}g\alpha_i^{-1}$ を代入すれば，$n\to\infty$ のとき $d_r(g_n, g)\to 0$ となることがわかる．また，(4)から $g\in B_\delta$ である．

以上で B_δ が完備な距離空間となることがわかった．すると第2章§8定理8から，B_δ は Baire 空間となる．そして，さらに第2章§8定理7(1)から，$\mathcal{B}_\delta{}^r(\mathcal{U},\mathcal{V},j,f)$ も Baire 空間となる．したがって，同じ定理の(2)から，$\mathcal{C}^r(M, N)$は Baire 空間となる．▮

以上で，M, N がコンパクト C^r 多様体のとき，$\mathcal{C}^r(M,N)$ が Baire 空間であることがわかった．さらに，N が C^{r+s+2} 多様体のときは $\mathcal{C}^r(M,N)$ に C^s 多様体の構造が入ることも知られている．くわしくは，あとがきであげる文献を参照されたい．

M をコンパクト C^r 多様体とする．このとき，M の上の力学系全体の空間を，つぎのように定義する．

まず，**連続な力学系のとき**，M の C^r ベクトル場とその生成する力学系を同一視することにして，$\mathcal{X}^r(M)=\Gamma^r(\tau(M))$ を **M の上の C^r 力学系の空間**と考えることにする．これは Banach 空間で，したがって，Baire 空間でもある．

また，M の上の**離散力学系の場合**，$\mathrm{Diff}^r(M)=\mathrm{Diff}^r(M,M)$ を **M の C^r 力学系の空間**とする．これも Baire 空間である．

そこで，$\mathcal{X}^r(M)$ または $\mathrm{Diff}^r(M)$ を $\mathrm{Dyn}^r(M)$ と表わし，これを **M の C^r 力学系空間**ともいう．これは Baire 空間である．

いま，C^r 力学系に対する性質を P とする．任意のコンパクト C^r 多様体 M に対して，$\mathrm{Dyn}^r(M)$ の適当な Baire 集合があって，その各元に対して性質 P が成立するとき，P を**生成的な性質**という．

一般に，生成的な性質を見つけることは，力学系の理論の中の重要な問題である．

つぎに，C^r 力学系の間の同値関係 E が与えられたものとする．いま，M の上の C^r 力学系 f に対して，f の $\mathrm{Dyn}^r(M)$ における適当な近傍 $\mathcal{N}$ があって，$\mathcal{N}$ に属する任意の力学系 g は f と E 同値となるとき，f は **E 安定**であるという．

この同値関係 E として，§5の位相同値(または位相共役)をとるとき，E 安定を**構造安定**という．

すなわち，$f\in \mathrm{Dyn}^r(M)$ が構造安定とは，f の $\mathrm{Dyn}^r(M)$ における適当な近傍 $\mathcal{N}$ があって，$\mathcal{N}$ の任意の元 g は f と位相同値となるときをいう．

物理学，生物学，工学などで使われる微分方程式は，係数が近似的にしか定まらないことが多い．したがって，係数の微小な変化によって，解の大域的な状態が，本質的な変化を生じないような微分方程式が重要である．

構造安定性の概念は，このような見地から，1937年にソ連の Andronov-Pontrjagin によって初めて導入されたものであって，これをめぐって，Smale の微分可能な力学系の理論が展開され，多くの美しい結果が得られた．また，さらに Thom のカタストロフィー理論も，このような安定性の概念と密接なつながりを持つものである．

第8章　Hartmanの定理と安定多様体

§1　双曲型不動点

E を複素 Banach 空間，$L: E \to E$ を連続線型写像とする．いま，L のスペクトルを $\sigma(L)$ とする．すなわち，$1_E: E \to E$ を E の恒等写像として，$\sigma(L) = \{\lambda \in \boldsymbol{C};\ \lambda 1_E - L \notin \mathrm{Iso}(E;E)\}$ である．$\sigma(L)$ は $\boldsymbol{C}$ の空でないコンパクト部分集合である(第5章§5命題2)．

$\boldsymbol{C}$ の単位円周を $S^1 = \{\lambda \in \boldsymbol{C};\ |\lambda| = 1\}$ とし，$\sigma(L) \cap S^1 = \phi$ となるような線型同相写像 $L: E \to E$ を，**双曲型線型同相写像**という．

E が**実 Banach 空間のとき**，線型同相写像 $L: E \to E$ の複素化 $L_C: E_C \to E_C$ は線型同相写像となるが，これが双曲型のとき，L を**双曲型線型同相写像**という．

E が有限次元のとき，$\sigma(L)$ は L の固有値全体の集合であるから，同型写像(線型同相写像) $L: E \to E$ が双曲型となるための必要十分条件は，L が絶対値1の固有値を持たないことである．

双曲型線型同相写像の特徴を与える定理1を証明するため，つぎの2つの補題を用意しよう．

補題1　E を Banach 空間，$L, L_1, L_2: E \to E$ を連続線型写像とする．

(1)　いま $L_1 + L_2 = 1_E$，$L_1L_1 = L_1$，$L_2L_2 = L_2$ とし，$E_1 = \mathrm{Im}\, L_1$，$E_2 = \mathrm{Im}\, L_2$ とおくと，$E_1 = \mathrm{Ker}\, L_2$，$E_2 = \mathrm{Ker}\, L_1$ となる．したがって，これらは E の閉部分ベクトル空間となるが，さらに $E = E_1 \oplus E_2$ (位相直和)となる．

(2)　$LL_1 = L_1L$，$LL_2 = L_2L$ が成立すれば，E_1, E_2 は L 不変，すなわち，

$L(E_1)\subset E_1$, $L(E_2)\subset E_2$ となる.

証明 (2)はすぐわかるから, (1)を証明しよう.

$x\in E$ とすると, $x=1_E(x)=(L_1+L_2)(x)=L_1(x)+L_2(x)$ となる. したがって, $E=E_1+E_2$ である.

$$L_1L_1=L_1,\ L_2=1_E-L_1 \quad \text{から} \quad L_2L_1=(1_E-L_1)L_1=L_1-L_1L_1=0$$

となる. したがって, $E_1\subset \mathrm{Ker}\,L_2$ である. 逆に, $x\in \mathrm{Ker}\,L_2$ とすると, $x=L_1(x)+L_2(x)=L_1(x)\in E_1$ となる. すなわち, $\mathrm{Ker}\,L_2\subset E_1$ となる.

以上で, $E_1=\mathrm{Ker}\,L_2=L_2^{-1}(0)$がわかった. L_2 は連続だから, E_1 は E の閉部分ベクトル空間である.

同様にして, $E_2=\mathrm{Ker}\,L_1$ となる. これが E の閉部分ベクトル空間となることがわかる.

つぎに, $E_1\cap E_2=\mathrm{Ker}\,L_2\cap \mathrm{Ker}\,L_1$ であるから, $x\in E_1\cap E_2$ とすると, $x=L_1(x)+L_2(x)=0+0=0$ となる. すなわち, $E_1\cap E_2=\{0\}$ となる.

以上で, E は2つの閉部分ベクトル空間 E_1 と E_2 のベクトル空間としての直和となることがわかった. したがって, 第4章§2開写像定理系2から, $E=E_1\oplus E_2$(位相直和)となる. ▌

補題 2 E を実 Banach 空間, E_C をその複素化とする. すると, E_C の元は $x+iy$, $x,y\in E$ の形に一意的に表わされる. いま, $c:E_C\to E_C$ を $c(x+iy)=x-iy$, $x+iy\in E_C$ で定義される写像とする. このとき, つぎのことが成立する.

(1) E_C の複素部分ベクトル空間 $\tilde{F}$ が E の実部分ベクトル空間 F の複素化 F_C と一致するための必要十分条件は, $c(\tilde{F})=\tilde{F}$ となることである. そして, このとき $F=\tilde{F}\cap E$ となる. また, F が閉部分ベクトル空間となるための必要十分条件は, $\tilde{F}$ が閉部分ベクトル空間であることである.

(2) $E_C=\tilde{E}_1\oplus\tilde{E}_2$(位相直和)であって, E の適当な部分ベクトル空間 E_1, E_2 に対して, $\tilde{E}_1=E_{1C}$, $\tilde{E}_2=E_{2C}$ となるならば, $E=E_1\oplus E_2$(位相直和)である.

証明 F を E の部分ベクトル空間とし, $\tilde{F}=F_C$ とすると, $c(\tilde{F})\subset\tilde{F}$, $F=\tilde{F}\cap E$ は明らかである.

逆に $c(\tilde{F})\subset\tilde{F}$ をみたす E の複素部分ベクトル空間 $\tilde{F}$ を考える．$F=\tilde{F}\cap E$ とおくと，これは E の部分ベクトル空間となる．そして $x+iy\in\tilde{F}$, $x,y\in E$ とすると，$c(x+iy)=x-iy\in\tilde{F}$ であって

$$x=(1/2)\{(x+iy)+(x-iy)\}\in\tilde{F}\cap E=F,$$

$$y=(1/2i)\{(x+iy)-(x-iy)\}\in\tilde{F}\cap E=F$$

となるから，$x+iy\in F_C$ である．すなわち，$\tilde{F}\subset F_C$ である．

一方，$F=\tilde{F}\cap E\subset\tilde{F}$ で，$\tilde{F}$ は E_C の複素部分ベクトル空間だから，$F_C\subset\tilde{F}$ である．すなわち，$F_C=\tilde{F}$, $F=\tilde{F}\cap E$ がわかった．

さらに，$\tilde{F}$ が E_C の閉集合なら，E は E_C の部分空間だから，$F=\tilde{F}\cap E$ は E の閉集合である．逆に，F が E の閉集合なら，$F_C=F\times F\subset E\times E=E_C$ だから，F_C は E_C の閉集合である．

以上で(1)の証明が終った．そこでつぎに(2)を証明しよう．

(2)の仮定と(1)から，E_1, E_2 は E の閉部分ベクトル空間で，$E_1=\tilde{E}_1\cap E$, $E_2=\tilde{E}_2\cap E$ となる．

$E\subset E_C=\tilde{E}_1\oplus\tilde{E}_2$ だから，E の元 x は，$x=v_1+v_2$, $v_1\in\tilde{E}_1$, $v_2\in\tilde{E}_2$ の形に一意的に表わされる．

一方，$x=c(x)=c(v_1)+c(v_2)$ となるが，(1)から $c(\tilde{E}_1)\subset\tilde{E}_1$, $c(\tilde{E}_2)\subset\tilde{E}_2$ となることから，$c(v_1)\in\tilde{E}_1$, $c(v_2)\in\tilde{E}_2$ となる．したがって，x の表現の一意性によって，$v_1=c(v_1)$, $v_2=c(v_2)$ となる．すなわち，$v_1, v_2\in E$ となる．

以上から，$v_1\in\tilde{E}_1\cap E=E_1$, $v_2\in\tilde{E}_2\cap E=E_2$ となり，E の任意の元 x が $x=v_1+v_2$, $v_1\in E_1$, $v_2\in E_2$ の形に一意的に表わされることになった．したがって，E はベクトル空間として，E_1 と E_2 の直和である．そこで，E_1, E_2 が E の閉部分ベクトル空間であることに注意すると，これは位相直和でもあることがわかる．∎

定理 1　E を Banach 空間，$L:E\to E$ を線型同相写像とする．このとき，L が双曲型となるための必要十分条件は，つぎの2つの条件が成立することである．

(1)　E は L 不変な2つの閉部分ベクトル空間 E^s, E^u の位相直和である．

すなわち

$E=E^s\oplus E^u$(位相直和)であって,

$$L(E^s)\subset E^s, \quad L(E^u)\subset E^u$$

が成立する.

(2) $L_s=L|E^s:E^s\to E^s$, $L_u=L|E^u:E^u\to E^u$ とおくと,これらは線型同相写像であって,E のノルム $\|\cdot\|$ と同値な適当なノルム $\|\cdot\|_1$ をとると,$\|L_s\|_1<1$, $\|L_u^{-1}\|_1<1$ となる.

証明 E を複素 Banach 空間,$L:E\to E$ を双曲型線型同相写像として,上の(1),(2)を証明しよう.

いま $\sigma_s=\{\lambda\in\sigma(L)\,;\,|\lambda|<1\}$,$\sigma_u=\{\lambda\in\sigma(L)\,;\,|\lambda|>1\}$ とおくと,$\sigma(L)\cap S^1=\phi$ だから,$\sigma(L)=\sigma_s\cup\sigma_u$, $\sigma_s\cap\sigma_u=\phi$ となる.そして,σ_s,σ_u はともに $\sigma(L)$ の開かつ閉部分集合となる.すなわち,$\sigma(L)$ のスペクトル集合となる.

いま,D_s を σ_s を内部に含む開集合,D_u を σ_u を内部に含む開集合とし,$D_s\cap D_u=\phi$ をみたすようにとる.そして,$D=D_s\cup D_u$ 上の関数 φ_s,φ_u を

$$\varphi_s|D_s=1, \quad \varphi_s|D_u=0,$$
$$\varphi_u|D_s=0, \quad \varphi_u|D_u=1$$

と定義すると,これは D 上の解析関数である.

いま,$\boldsymbol{C}$ の開集合 U を,$\sigma(L)\subset U\subset\bar{U}\subset D$ をみたし,U の境界 Bd U が有限個の自分自身交わらない回路 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ からなるようにとる($\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ の向きは,U の内部を左に見る自然な向きとする).

いま,$\lambda\notin\sigma(L)$ として,L のレゾルベントを $R(\lambda:L)=(\lambda 1_E-L)^{-1}$ とする.そして

$$E(\sigma_s)=E(\sigma_s\,;L)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Bd}\,U}\varphi_s(\lambda)R(\lambda\,;L)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}\varphi_s(\lambda)R(\lambda\,;L)d\lambda,$$

$$E(\sigma_u)=E(\sigma_u\,;L)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Bd}\,U}\varphi_u(\lambda)R(\lambda\,;L)d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}\varphi_u(\lambda)R(\lambda\,;L)d\lambda$$

とおく.すると,これらは E から E への連続線型写像であって,D,U のとり方に無関係であることがわかる(第5章§5参照).

σ_s は単位円 S^1 の内部のコンパクト集合で，σ_u は S^1 の外部のコンパクト集合だから，D_s, D_u, U を適当にとって，$\gamma_1=S^1$ で，他の $\gamma_k, (k=2, \cdots, n)$ は D_u に含まれるようにできる．すると，φ_s の定義から

$$E(\sigma_s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} R(\lambda ; L)d\lambda$$

となる．

つぎに，第5章§5命題4から，$E(\sigma_s), E(\sigma_u)$ は L と可換で，

$$\varphi_s+\varphi_u = 1 \quad だから \quad E(\sigma_s)+E(\sigma_u) = 1_E,$$

$$\varphi_s\varphi_s = \varphi_s \quad だから \quad E(\sigma_s)E(\sigma_s) = E(\sigma_s),$$

$$\varphi_u\varphi_u = \varphi_u \quad だから \quad E(\sigma_u)E(\sigma_u) = E(\sigma_u)$$

が成立する．したがって，$E^s=\mathrm{Im}\, E(\sigma_s)$，$E^u = \mathrm{Im}\, E(\sigma_u)$ とおくと，補題1から，E^s, E^u は L 不変な E の閉部分ベクトル空間で，$E=E^s \oplus E^u$(位相直和)が成立する．

いま，$L_s=L|E^s : E^s \to E^s$，$L_u=L|E^u : E^u \to E^u$ とおくと，L が線型同相写像だから，L_s, L_u も線型同相写像であって，第5章§5定理4から

$$\sigma(L_s) = \sigma_s, \qquad \sigma(L_u) = \sigma_u$$

となる．さらに，第5章§5命題4定理1から

$$\sigma(L_u{}^{-1}) = \sigma_u{}^{-1} = \{\lambda^{-1} \in \boldsymbol{C};\ \lambda \in \sigma_u\}$$

となる．したがって，$\sigma(L_s), \sigma(L_u{}^{-1})$ は，$\boldsymbol{C}$ の単位円 S^1 の内部に含まれるコンパクト集合となる．

ゆえに，$L_s, L_u{}^{-1}$ のスペクトル半径 $r(L_s)=\sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(L_s)\}$，$r(L_u{}^{-1})=\sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(L_u{}^{-1})\}$ はいずれも1より小さい．そこで $\max\{r(L_s), r(L_u{}^{-1})\}<a<1$ となる正数 a を固定しよう．すると，第5章§5命題2から，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|L_s{}^u\|} = r(L_s) < a$$

となる．したがって，十分大きな自然数 p に対して，$\sqrt[p]{\|L_s{}^p\|}<a$，すなわち，$\|L_s{}^p\|<a^p$ が成立する．このような p を固定すると，$0\leqq\|L_s{}^p\|/a^p<1$ から，$k=0, 1, \cdots, p-1$ として

$$\sum_{m=0}^{\infty} a^{-pm-k}\|L_s{}^{pm+k}\| \leqq \sum_{m=0}^{\infty} a^{-pm-k}\|L_s{}^p\|^m\|L_s{}^k\| \leqq a^{-k}\|L_s{}^k\|\left(\sum_{m=0}^{\infty}(\|L_s{}^p\|/a^p)^m\right) < \infty$$

となる．したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s{}^n\| = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a^{-pm-k}\|L_s{}^{pm+k}\|\right) < \infty$$

となる．

そこで，$x \in E^s$ に対して，$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s{}^n(x)\|$ とおくと

$$\|x\| \leqq \|x\|_1 \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s{}^n\|\right)\|x\|$$

となる．したがって，$\|x\|_1$ は有限であるが，これが E^s のノルムとなることはすぐわかる．そして，上の式から，E^s で $\|\cdot\|_1$ は $\|\cdot\|$ と同値なノルムである．

また，$x \in E^s$ なら

$$\|L_s(x)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_s{}^{n+1}(x)\| \leqq a\|x\|_1$$

となる．すなわち，$\|L_s\|_1 \leqq a < 1$ となる．

上と同じようにして，$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_u{}^{-n}\| < \infty$ となり，$y \in E^u$ にたいして，$\|y\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_u{}^{-n}(y)\|$ とおくと，

$$\|y\| \leqq \|y\|_1 \leqq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\|L_u{}^{-n}\|\right)\|y\|$$

であって，$\|\cdot\|_1$ は E^u 上で $\|\cdot\|$ と同値なノルムである．

また，$y \in E^u$ ならば $\|L_u{}^{-1}(y)\| \leqq a\|y\|_1$ となり，$\|L_u{}^{-1}\|_1 \leqq a < 1$ もわかる．

つぎに，E の元は $x+y$，$x \in E^s$，$y \in E^u$ の形に一意的にあらわされるが，$\|x+y\|_1 = \max\{\|x\|_1, \|y\|_1\}$ とおくと，これが E のノルム $\|\cdot\|$ と同値なノルムであることは，これまでの結果からすぐわかる．

以上で，複素 Banach 空間 E の双曲型線型同相写像 L が定理1の条件(1)，(2)をみたすことがわかった．

逆に，(1)，(2)をみたす線型同相写像 $L: E \to E$ をとると，スペクトルの定義から，$\sigma(L) = \sigma(L_s) \cup \sigma(L_u)$ となる．そして，$\|L_s\|_1 < 1$，$\|L_u{}^{-1}\| < 1$ と，第5章

§5 命題2から，これらのスペクトル半径 $r(L_s), r(L_u{}^{-1})$ は1より小である(たとえば $r(L_s)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|L_s{}^n\|}\leqq\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|L_s\|^n}=\|L_s\|<1$). したがって，$\sigma(L_s), \sigma(L_u{}^{-1})$ は単位円 S^1 の内部に含まれる．したがって，$\sigma(L_s)$ および $\sigma(L_u)=\{\sigma(L_u{}^{-1})\}^{-1}$ は単位円 S^1 と交わらない．ゆえに，$\sigma(L)=\sigma(L_s)\cup\sigma(L_u)$ も S^1 と交わらない．以上で L が双曲型であることがわかった．

最後に，E が実 Banach 空間，$L:E\to E$ が線型同相写像のときを考察しよう．

$L:E\to E$ が双曲型，すなわち，L の複素化 $L_C:E_C\to E_C$ が双曲型とする．L_C に対して定理1を適用して，E_C の L_C 不変な位相直和分解 $E_C=\tilde{E}^s\oplus\tilde{E}^u$ を得る．

いま，$c:E_C\to E_C$ を補題2の写像とすると，これは実ベクトル空間としての線型同相写像であって，$\lambda\in \boldsymbol{C}$ に対して，$c(\lambda 1_E)=\bar{\lambda}c$ が成立する．また，$cL_C=L_Cc$ も成立する．したがって，$cR(\lambda;L_C)=c(\lambda|_E-L_C)^{-1}=(\bar{\lambda}|_E-L_C)^{-1}c=R(\bar{\lambda};L_C)c$ となる．これから

$$
\begin{aligned}
cE(\sigma_s)&=c\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}R(\lambda;L_C)\,d\lambda\right)=\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}R(\bar{\lambda};L_C)\,d\lambda\right)c\\
&=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{S^1}R(\lambda;L_C)\,d\lambda\right)c=E(\sigma_s)c
\end{aligned}
$$

となる．

さらに，$E(\sigma_u)=1_E-E(\sigma_s)$ から，$cE(\sigma_u)=E(\sigma_u)c$ となる．

以上から，$\tilde{E}^s=\mathrm{Im}\,E(\sigma_s)$，$\tilde{E}^u=\mathrm{Im}\,E(\sigma_u)$ は c 不変，すなわち，$c(\tilde{E}^s)\subset\tilde{E}^s$，$c(\tilde{E}^u)\subset\tilde{E}^u$ となる．ゆえに，補題2から，E の適当な閉部分ベクトル空間 E^s と E^u があって，$\tilde{E}^s=E_C{}^s$，$\tilde{E}^u=E_C{}^u$，$E^s=\tilde{E}^s\cap E$，$E^u=\tilde{E}^u\cap E$ となる．そして，さらに，$E=E^s\oplus E^u$(位相直和)となる．

$\tilde{E}^s, \tilde{E}^u$ は L_C 不変で，$L_C|E=L$ だから，E^s, E^u は L 不変となる．そして，$L_s=L|E^s:E^s\to E^s$，$L_u=L|E^u:E^u\to E^u$ とおくと，

$$
(L_C)_s=L_C|\tilde{E}^s=(L_s)_C,\qquad (L_C)_u=L_C|\tilde{E}^u=(L_u)_C
$$

となることは明らかである．

実 Banach 空間の連続線型写像 L に対して，L のノルムと L_C のノルムが一致することから(第4章§2)，定理の条件をみたす E_C のノルム $\|\cdot\|_1$ を E に制限して考えると

$$\|L_s\|_1 = \|(L_C)_s\|_1 < 1, \qquad \|L_u{}^{-1}\| = \|(L_C)_u\|_1 < 1$$

となる．

逆に，線型同相写像 $L: E \to E$ が定理1の(1), (2)の条件をみたすとき，その複素化 $L_C: E_C \to E_C$ が，同じく定理1の(1), (2)の条件をみたすことはすぐわかるから，L_C は双曲型となる．すなわち L は双曲型である．▌

補題 3　E をBanach 空間，$L: E \to E$ を線型同相写像とする．いま，適当な定数 $c>0$，$0<\lambda<1$ があって，任意の零または正の整数 n に対して，$\|L^n(x)\| \leqq c\lambda^n\|x\|$，$x \in E$ が成立するなら，E のノルム $\|\cdot\|$ と同値な適当なノルム $\|\cdot\|_1$ が存在して $\|L\|_1<1$ とできる．

証明　$c \leqq 1$ なら，$n=1$ として $\|L(x)\| \leqq \lambda\|x\|$，$x \in E$ となる．したがって，$\|L\| \leqq \lambda < 1$ となる．

$c>1$ とする．$0<\lambda<1$ から，十分大きな整数 $q>0$ に対して，$c\lambda^q<1$ が成立する．そこで $x \in E$ に対して

$$\|x\|_1 = \left\{\sum_{n=0}^{q-1} \|L^n(x)\|^2\right\}^{1/2}$$

とおくと，Minkowsky の不等式(第4章§1)から得られるつぎの不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

(a_i, b_i は実数)によって，$\|\cdot\|_1$ は E のノルムとなることがわかる．

さらに仮定から，

$$\|x\|^2 \leqq \|x\|_1{}^2 \leqq \sum_{n=0}^{q-1} c^2\lambda^{2n}\|x\|^2 \leqq qc^2\|x\|^2$$

となる．すなわち

(＊)　$\|x\| \leqq \|x\|_1 \leqq \sqrt{qc^2}\|x\|, \qquad x \in E$

となる．したがって，$\|\cdot\|_1$ は $\|\cdot\|$ と同値なノルムである．

最後に，$0<c\lambda^q<1$ と，(＊)および仮定から

$$\begin{aligned}\|L(x)\|_1{}^2 &= \sum_{n=1}^{q}\|L^n(x)\|^2\\ &= \|x\|_1{}^2-\|x\|+\|L^q(x)\|^2\\ &\leqq \|x\|_1{}^2-(1-(c\lambda^q)^2)\|x\|^2\\ &\leqq \{1-(1-(c\lambda^q)^2)/qc^2\}\|x\|_1{}^2\end{aligned}$$

となる．いま $\sigma_0=\{1-(1-(c\lambda^q)^2)/qc^2\}^{1/2}$ とおくと，$0<\sigma_0<1$ となり，$\|L(x)\|_1\leqq\sigma_0\|x\|_1$，$x\in E$ となる．すなわち $\|L\|_1\leqq\sigma_0<1$ である．▌

定理 2 E を Banach 空間，$L:E\to E$ を線型同相写像とする．このとき，$L:E\to E$ が双曲型となるための必要十分条件は，つぎの2つの条件が成立することである．

(1) E は L 不変な2つの閉部分ベクトル空間 E^s, E^u の位相直和である．

(2) 適当な定数 $c>0$，$0<\lambda<1$ が存在して，任意の零または正の整数 n に対して

$$\|L^n(x)\|\leqq c\lambda^n\|x\|,\qquad x\in E^s,$$
$$\|L^{-n}(x)\|\leqq c\lambda^n\|x\|,\qquad x\in E^u$$

が成立する．

証明 L が双曲型とすると，定理1から(1)が成立する．そして，$L_s=L|E^s: E^s\to E^s$，$L_u=L|E^u: E^u\to E^u$ とおくと，これらは線型同相写像であって，E のノルム $\|\cdot\|$ と同値な適当なノルム $\|\cdot\|_1$ をとると，$\|L_s\|_1<1$，$\|L_u{}^{-1}\|_1<1$ となる．いま，$\max\{\|L_s\|_1, \|L_u{}^{-1}\|_1\}=\lambda$ とおくと，$0<\lambda<1$ である．そして，適当な正数 a, b があって，

$$a\|x\|\leqq\|x\|_1\leqq b\|x\|,\qquad x\in E$$

となる．

したがって，$x\in E^s$ として，任意の零または正の整数 n に対して，

$$\|L^n(x)\|\leqq(1/a)\|L_s{}^n(x)\|_1\leqq(1/a)\lambda^n\|x\|_1\leqq(b/a)\lambda^n\|x\|$$

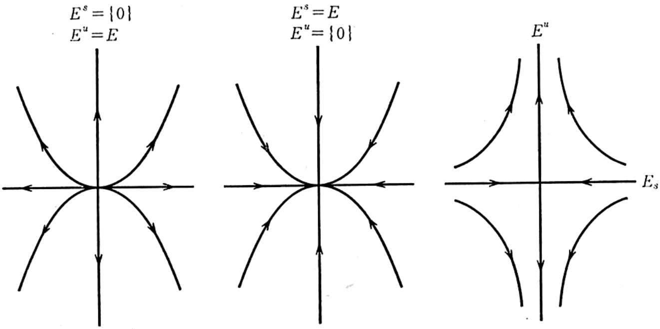
が成立する．すなわち，$c=b/a>0$ とすると，

$$\|L^n(x)\|\leqq c\lambda^n\|x\|,\qquad x\in E^s$$

が成立する．

また，同様に $\|L^{-n}(x)\| \leqq c\lambda^n\|x\|$, $x \in E^u$ もわかる.

逆に定理の(1), (2)が成立しているものとする．このとき $L_s = L|E^s : E^s \to E^s$, $L_u = L|E^u : E^u \to E^u$ として，L_s, L_u^{-1} に補題3を適用すると，E^s, E^u のノルム $\|\cdot\|$ と同値なノルム $\|\cdot\|_1$ で，$\|L_s\|_1 < 1$, $\|L_n\|_1 < 1$ となるものが存在する．そこで，E の元 $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in E^s$, $x_2 \in E^u$ に対して，$\|x\|_1 = \max\{\|x_1\|_1, \|x_2\|_1\}$ とおくと，これは E のノルム $\|\cdot\|$ と同値なノルムで，定理1の(2)の条件をみたす．したがって，定理1から L は双曲型である(実は定理1を使わないでも直接 $\sigma(L) \cap S^1 = \phi$ が証明できる). ∎



源点　　沈点　　鞍点

系　$L : E \to E$ を双曲型線型同相写像とする．このとき，つぎの3つの性質が成立する．

(1)　$E^s = \{x \in E;\ \lim_{n\to\infty} L^n(x) = 0\} = \{x \in E;\ L^n(x),\ n \geqq 0$ は有界$\}$,

$E^u = \{x \in E;\ \lim_{n\to\infty} L^{-n}(x) = 0\} = \{x \in E;\ L^{-n}(x),\ n \geqq 0$ は有界$\}$

(2)　$x \notin E^s$　ならば　$\lim_{n\to\infty} \|L^n(x)\| = \infty$,

$x \notin E^u$　ならば　$\lim_{n\to\infty} \|L^{-n}(x)\| = \infty$

(3)　0は L のただ1つの不動点である．

証明　L を双曲型とすると，定理2が成立する．したがって，適当な定数 $c>0$, $0<\lambda<1$ が存在して，$n \geqq 0$ として

$$\|L^n(x)\| \leqq c\lambda^n\|x\|, \quad x \in E^s,$$
$$\|L^{-n}(x)\| \leqq c\lambda^n\|x\|, \quad x \in E^u$$

が成立する．

このことから，$x \in E^s$ なら $\lim_{n\to\infty} L^n(x)=0$ は明らか．また，$x \in E^u$ として，$\|x\| \leqq c\lambda^n\|L^n(x)\|$，$n \geqq 0$ がわかる．すなわち $\|L^n(x)\| \geqq c^{-1}\lambda^{-n}\|x\|$ となる．したがって，$x \neq 0$ なら $x \in E^u$ のとき $\lim_{n\to\infty}\|L^n(x)\|=\infty$ となる．

いま $x \notin E^s$ とすると，$x=x_1+x_2$，$x_1 \in E^s$，$x_2 \in E^u$ と表わすとき，$x_2 \neq 0$ となる．そして，三角不等式から

$$\|L^n(x)\| = \|L^n(x_1)+L^n(x_2)\| \geqq \|L^n(x_2)\|-\|L^n(x_1)\|$$

となるが，$\lim_{n\to\infty}\|L^n(x_2)\|=\infty$，$\lim_{n\to\infty}\|L^n(x_1)\|=0$ から，$\lim_{n\to\infty}\|L^n(x)\|=\infty$ となる．

以上から，(1), (2)の前半がすぐわかる．また，(1), (2)の後半も同様に証明できる．(3)は(2)からすぐわかる．∎

注意 1　E を有限次元 Banach 空間，$L: E \to E$ を双曲型線型同相写像とする．第3章§3定理1, 2から，E の適当な基底をとって，L を Jordan 標準形に表現する．

いま，絶対値が1より小(大)であるような固有値をもつ Jordan 細胞に対応する E の部分ベクトル空間の直和を $E_1(E_2)$ とする．すると，E_1, E_2 は L 不変な E の部分ベクトル空間となるが，実は，$E_1=E^s$，$E_2=E^u$ となることをつぎに証明しよう．

$L_i=L|E_i: E_i \to E_i$，$i=1, 2$ とおくと，定義から，$L_1(L_2)$ の固有値の絶対値は，すべて1より小(大)となる．したがって，$\sigma(L_1), \sigma(L_2^{-1})$ は単位円の内部に含まれる．また，L は双曲型だから，絶対値1の固有値は存在しない．ゆえに $E=E_1 \oplus E_2$ となる．

以上から，定理1の証明と同様にして，E のノルムと同値な適当なノルム $\|\cdot\|_1$ があって，$\|L_1\|_1<1$，$\|L_2^{-1}\|_1<1$ となる．

ゆえに，定理2の系と同様にして，$E_1=\{x \in E;\ \lim_{n\to\infty} L^n(x)=0\}$，$E_2=\{x \in E;\ \lim_{n\to\infty} L^{-n}(x)=0\}$ を得る．これと，定理2系から，$E_1=E^s$，$E_2=E^u$ がわかる．

注意 2 E を Banach 空間, $L: E\to E$ を線型同相写像とする. このとき, L が $E^s=\{0\}$ となる双曲型線型同相写像となるための必要十分条件は, $\sigma(L)$ が, 絶対値が 1 より大きい複素数のみからなることである.

同様に, L が $E^u=\{0\}$ となる双曲型線型同相写像となるための必要十分条件は, $\sigma(L)$ が, 絶対値が 1 より小さい複素数のみからなることである.

このことは, 定理 1 の証明において, $\sigma_s=\phi$, または $\sigma_u=\phi$ の場合を考察することによって, 容易に確かめることができる.

たとえば, $\sigma(L)$ が, 絶対値が 1 より大きい複素数のみからなるものとすると, $\sigma(L)=\sigma_u$, $\sigma_s=\phi$ となる. したがって, $E(\sigma_s), E(\sigma_u)$ を定義するときの関数 φ_s, φ_u を, $\varphi_s\equiv 0$, $\varphi_u\equiv 1$ にとることができる. ゆえに, 第 5 章 §4 命題 4 から, $E(\sigma_s)=0$, $E(\sigma_u)=1$ がわかる. したがって, $E^s=\operatorname{Im} E(\sigma_s)=\{0\}$, $E^u=\operatorname{Im} E(\sigma_u)=E$ となる.

逆に, $E^s=\{0\}$, $E^u=E$ ならば, $\sigma(L)$ が, 絶対値が 1 より大きい複素数のみからなることは, 定理 1 の証明から明らかである.

E を Banach 空間, $L: E\to E$ を連続線型写像とする. このとき, $\exp L: E\to E$ を

$$\exp L = 1+L+\frac{L^2}{2!}+\cdots+\frac{L^n}{n!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^n}{n!}$$

と定義する. ここで, $1: E\to E$ は E の恒等写像とする. すると, $\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{L^n}{n!}\right\| \leqq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|L\|^n}{n!}=e^{\|L\|}$ から, 上の右辺の級数は絶対収束し, $\exp L: E\to E$ は連続線型写像となる.

命題 1 (1) $L: E\to E$ を連続線型写像とすると, $\exp L=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^n}{n!}$ は絶対収束し, E から E への連続線型写像となる. そして, $\|\exp L\|\leqq e^{\|L\|}$ が成立する.

(2) $L_1, L_2: E\to E$ を連続線型写像とし, $L_1L_2=L_2L_1$ が成立するものとする. このとき, $\exp(L_1+L_2)=\exp L_1 \exp L_2$ となる.

証明 (1) は証明されているから, (2) を証明しよう.

$$s_k=\sum_{n=0}^{k}\frac{(L_1+L_2)^k}{n!}, \qquad s_k'=\sum_{n=0}^{k}\frac{{L_1}^k}{n!}, \qquad s_k''=\sum_{n=0}^{k}\frac{{L_2}^k}{n!}$$

とおく．

$$L_1L_2 = L_2L_1 \quad から，\ (L_1+L_2)^n = \sum_{q=0}^{n} \frac{n!}{q!\,(n-q)!} L_1{}^q L_2{}^{n-q}$$

が成立する．したがって，簡単な計算から

$$s_{2k} - s_k' s_k'' = \sum_{\substack{k<i+j\leqq 2k \\ \max\{i,j\}>k}} \frac{L_1{}^i}{i!} \frac{L_2{}^j}{j!}$$

となる．この式の右辺の項の個数は $k(k+1)$ であるから，$l=\max\{1, \|L_1\|, \|L_2\|\}$ とおくと

$$\|s_{2k} - s_k' s_k''\| \leqq k(k+1) \frac{l^{2k}}{(k+1)!} = l^2 \frac{(l^2)^{k-1}}{(k-1)!}$$

となる．したがって，$k\to\infty$ として $\exp(L_1+L_2) - \exp L_1 \exp L_2 = 0$ を得る．▌

系　$L: E\to E$ を連続線型写像とする．このとき，つぎのことが成立する．

(1)　$t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}$ ならば，$\exp(t_1+t_2)L = \exp t_1 L \exp t_2 L$,

(2)　$0: E\to E$ を零写像とすると，$\exp 0 = 1$,

(3)　$\exp L: E\to E$ は線型同相写像で，$(\exp L)^{-1} = \exp(-L)$.

証明　(1)は命題1から，(2)は定義から明らかである．

$$\exp L \exp(-L) = \exp(L-L) = \exp 0 = 1$$

同様に，$\exp(-L)\exp L = 1$ となるから，(3)がわかる．▌

命題 2　$L: E\to E$ を連続線型写像とする．このとき，$t\in \boldsymbol{R}$ に対して $\exp tL \in \mathcal{L}(E;E)$ を対応させる写像 $f: \boldsymbol{R}\to\mathcal{L}(E;E)$ は微分可能で，$Df(t) = Lf(t) = f(t)L$ が成立する．ここで，$\mathcal{L}(\boldsymbol{R};\mathcal{L}(E;E)) = \mathcal{L}(E;E)$ と同一視した．

証明　$$s_n(t) = 1 + tL + \frac{(tL)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tL)^n}{n!}, \qquad t\in\boldsymbol{R}$$

とおく．すると，s_n は微分可能で

$$Ds_n(t) = L + tL^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}L^n}{(n-1)!} = Ls_{n-1}(t) = s_{n-1}(t)L$$

が成立する．また，各 $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\lim_{n\to\infty} s_n(t) = \exp tL$ が成立する．

$s_n(t) - L\exp tL = -L\left(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{(tL)^i}{i!}\right)$ から，任意の正数 M に対して

$$|t| \leqq M \quad ならば \quad \|s_n(t) - L \exp tL\| \leqq \|L\| \left(\sum_{i=n}^{\infty} \frac{(M\|L\|)^i}{i!} \right)$$

となる．したがって，閉区間 $[-M, M]$ 上で $\{s_n\}$ は $L \exp tL$ に一様収束する．ゆえに，第5章§1定理4から，$f(t) = \exp tL$ は微分可能で，$Df(t) = L \exp tL = Lf(t)$ となる．さらに，$L \exp tL = (\exp tL) L$ もすぐわかる．▌

$L: E \to E$ を連続線型写像とする．これは E の上の C^∞ ベクトル場とも考えられる．そこで

(＊)　$Dx = L(x)$

なる常微分方程式を考察しよう．すなわち，J を実数の区間として

(＊)′　$D\alpha(t) = L(\alpha(t))$

をみたす E の C^1 曲線 $\alpha: J \to E$ を求めることにする．

いま，$x_0 \in E$ に対して，$\varphi^{x_0}: \boldsymbol{R} \to E$ を $\varphi^{x_0}(t) = (\exp tL) x_0$，$t \in \boldsymbol{R}$ と定義する．すると，命題2から，φ^{x_0} は初期条件を x_0 とする(＊)の積分曲線となることがわかる．

さらに，このベクトル場 L の生成する E の1パラメーター変換群 $\varphi: \boldsymbol{R} \times E \to E$ は，$\varphi(t, x) = (\exp tL) x$ で与えられることがわかった．以上をまとめて，つぎの定理を得る．

定理 3　E を Banach 空間，$L: E \to E$ を連続線型写像とする．いま，$x_0 \in E$ に対して，$\varphi^{x_0}: \boldsymbol{R} \to E$ を $\varphi^{x_0}(t) = (\exp tL) x_0$，$t \in \boldsymbol{R}$ と定義する．これは x_0 を初期条件とする(＊)の解(積分曲線)である．そして，L の生成する E の1パラメーター変換群 $\varphi: \boldsymbol{R} \times E \to E$ は，$\varphi(t, x) = (\exp tL) x$ で与えられる．

補題 4　$L: E \to E$ を連続線型写像とする．このとき，$\exp L: E \to E$ が双曲型線型同相写像となるための必要十分条件は，L のスペクトル $\sigma(L)$ が純虚数(実数部分が零の複素数)を含まないことである．

証明　第5章§5命題3から，$\exp L$ は $f(\lambda) = 1 + \lambda + \cdots + \dfrac{\lambda^n}{n!} + \cdots$ に対する $f(L)$ であることがわかる．したがって，第5章§5定理1から，$\sigma(\exp L) = \exp \sigma(L) = \{e^\lambda;\ \lambda \in \sigma(L)\}$ となる．このことから補題は明らかである．▌

$L: E \to E$ を連続線型写像とする．いま，$\exp L: E \to E$ が双曲型線型同相写

像とすると，定理1によって，E は $\exp L$ 不変な閉部分ベクトル空間 E^s, E^u の位相直和となる．

命題 3　以上の仮定と記号のもとで，つぎのことが成立する．

(1)
$$E^s = \{x \in E;\ \lim_{t\to\infty}(\exp tL)(x) = 0\}$$
$$= \{x \in E;\ (\exp tL)(x),\ t \geqq 0 \text{ は有界}\},$$
$$E^u = \{x \in E;\ \lim_{t\to-\infty}(\exp tL)(x) = 0\}$$
$$= \{x \in E;\ (\exp tL)(x),\ t \leqq 0 \text{ が有界}\}$$

(2)
$$x \notin E^s \quad \text{ならば} \quad \lim_{t\to\infty}\|(\exp tL)(x)\| = \infty,$$
$$x \notin E^u \quad \text{ならば} \quad \lim_{t\to-\infty}\|(\exp tL)(x)\| = \infty$$

(3)　t を零でない実数とすると，$\exp tL: E\to E$ は双曲型線型同相写像である．したがって，その不動点は E の原点 0 だけである．

証明　$0 \leqq t \leqq 1$ とすると，$\|\exp tL\| \leqq e^{t\|L\|} \leqq e^{\|L\|}$ となる．

いま，実数 $t>0$ を $t=n+t'$，n は整数で $0 \leqq t' < 1$ と表わすと，$t\to\infty$ のとき $n\to\infty$ となる．そして，命題1から

$$(\exp tL)(x) = (\exp t'L)(\exp nL)(x) = (\exp t'L)(\exp L)^n(x)$$

となる．したがって，

$$\|(\exp tL)(x)\| \leqq \|\exp t'L\|\|(\exp L)^n(x)\| \leqq e^{\|L\|}\|(\exp L)^n(x)\|$$

となる．すると，定理2系から，$x \in E^s$ のとき $\lim_{t\to\infty}(\exp tL)(x) = 0$ がわかる．

つぎに，$t \in [0,1]$ に対して $\|(\exp tL)^{-1}\|^{-1} \in \boldsymbol{R}$ を対応させる関数は連続である．そして，$[0,1]$ がコンパクトだから，その最小値が存在する．これを m とすると，$m>0$ である．そして，第6章§3補題1から

$$\|(\exp tL)(x)\| \geqq \|(\exp t'L)^{-1}\|^{-1}\|(\exp L)^n(x)\| \geqq m\|(\exp L)^n(x)\|$$

となる．したがって，定理2系から $x \in E^u$ で $x \neq 0$ なら $\lim_{t\to\infty}\|(\exp tL)(x)\| = \infty$ となる．

また，E の元 x を $x = x_1 + x_2$，$x_1 \in E^s$，$x_2 \in E^u$ と表わしたとき，$x \notin E^s$ とすると $x_2 \neq 0$ となる．三角不等式から

$$\|(\exp tL)(x_1+x_2)\| = \|(\exp tL)(x_1) + (\exp tL)(x_2)\|$$
$$\geqq \|(\exp tL)(x_2)\| - \|(\exp tL)(x_1)\|$$

となるが，$\lim_{t\to\infty}\|(\exp tL)(x_2)\|=\infty$，$\lim_{t\to\infty}\|(\exp tL)(x_2)\|=0$ であるから，$x\notin E^s$ なら $\lim_{t\to\infty}\|(\exp tL)(x)\|=\infty$ がわかる．

以上で，(1), (2) の前半がわかる．同様に，(1), (2) の後半も証明できる．

最後に，第5章§5定理1から，$\sigma(\exp tL)=\{\sigma(\exp L)\}^t$ が成立する．したがって，$t\neq 0$ なら，$\exp L$ が双曲型のとき，$\exp tL$ も双曲型となる．ゆえに，定理2系によって，(3) が成立する．∎

注意 3 $L:E\to E$ を連続線型写像，$\exp L:E\to E$ を双曲型線型同相写像とする．すると，補題4から，$\sigma(L)$ は虚軸と交わらない．いま，$\sigma_-=\{\lambda\in\sigma(L)$；$\lambda$ の実数部分は負$\}$，$\sigma_+=\{\lambda\in\sigma(L)$；$\lambda$ の実数部分は正$\}$ とおく．すると，$\sigma(L)=\sigma_-\cup\sigma_+$，$\sigma_-\cap\sigma_+=\phi$ であって，σ_-, σ_+ は $\sigma(L)$ のスペクトル集合となる．

定理1の証明と同様にして，連続線型写像 $E(\sigma_-;L), E(\sigma_+;L):E\to E$ を定義し，$E_-=\mathrm{Im}\,E(\sigma_-;L)$，$E_+=\mathrm{Im}\,E(\sigma_+;L)$ とおくと，これらは E の L 不変な閉部分ベクトル空間であって，$E=E_-\oplus E_+$（位相直和）となる．そして $L_-=L|E_-:E_-\to E_-$，$L_+=L|E_+:E_+\to E_+$ とおくと，$\sigma(L_-)=\sigma_-$，$\sigma(L_+)=\sigma_+$ となる．

つぎに，$\exp L$ に対して，定理1の証明を適用して，$\sigma(\exp L)=\sigma_s\cup\sigma_u$，$\sigma_s\cap\sigma_u=\phi$ と分解すると，定義から，$\exp\sigma_-=\sigma_s$，$\exp\sigma_+=\sigma_u$ となる．そして，第5章§5定理3から

$$E(\sigma_s;\exp L)=E(\sigma_-;L), \qquad E(\sigma_u;\exp L)=E(\sigma_+;L)$$

となる．したがって，$E^s=\mathrm{Im}\,E(\sigma_s;\exp L)=\mathrm{Im}\,E(\sigma_-;L)=E_-$ となる．同様にして，$E^u=E_+$ となる．

以上で，L に関して，$\sigma(L)$ のスペクトル集合 σ_-, σ_+ を用いて作った E の L 不変な位相直和分解 $E=E_-\oplus E_+$ は，$\exp L$ に関して $\sigma(\exp L)$ のスペクトル集合 σ_s, σ_u を用いて作った E の $\exp L$ 不変な位相直和分解 $E=E^s\oplus E^u$ に一致することがわかった．

とくに E が有限次元なら，$L:E\to E$ を適当な基底を用いて Jordan 標準形で表現したとき，$E^s(E^u)$ は実数部分が負（正）となるような固有値に対する Jordan 細胞に対応する E の部分ベクトル空間の直和となる．

注意 4　E を Banach 空間，$L: E \to E$ を連続線型写像とする．このとき，$\exp L: E \to E$ が $E^s = \{0\}$ の双曲型線型同相写像となるための必要十分条件は，$\sigma(L)$ が実数部分が正の複素数のみからなることである．

同様に，$\exp L$ が $E^u = \{0\}$ の双曲型線型同相写像となるための必要十分条件は，$\sigma(L)$ が，実数部分が負の複素数のみからなることである．

これらは注意2, 3からすぐわかる．

§2　Hartman の定理

E を Banach 空間，$L: E \to E$ を双曲型線型同相写像とする．§1 定理1から，E の L 不変な位相直和分解 $E = E_1 \oplus E_2$，および E の適当なノルム $\|\cdot\|$ があって，E の元 x を $x = x_1 + x_2$，$x_1 \in E_1$，$x_2 \in E_2$ とあらわしたとき，$\|x\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$ が成立し，さらに，

$$L_1 = L|E_1: \; E_1 \to E_1,$$
$$L_2 = L|E_2: \; E_2 \to E_2$$

とおくと，これらは線型同相写像で，$\|L_1\| < 1$，$\|L_2^{-1}\| < 1$ となる．

いま，このような E のノルム $\|\cdot\|$ を固定して，$a = \max\{\|L_1\|, \|L_2^{-1}\|\}$ を L の歪度という．すると，$0 < a < 1$ となる．

以下簡単のため，恒等写像を 1 で表わすことにする．

補題 1　$L: E \to E$ を双曲型線型同相写像，$a, (0 < a < 1)$ をその歪度とする．このとき，$1 - L: E \to E$ は線型同相写像であって，$\|(1-L)^{-1}\| \leqq (1-a)^{-1}$ となる．

証明　上と同じ記号を用いて，$\sum_{k=0}^{\infty} \|L_1{}^k\| \leqq \sum_{k=0}^{\infty} \|L_1\|^k \leqq \sum_{k=0}^{\infty} a^k \leqq (1-a)^{-1}$ となることから，$\sum_{k=0}^{\infty} L_1{}^k$ は $\mathcal{L}(E_1; E_1)$ で絶対収束する．そして，$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} L_1{}^k \right\| \leqq (1-a)^{-1}$ となる．

$$(1-L_1)\left(\sum_{k=0}^{\infty} L_1{}^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} L_1{}^k\right)(1-L_1) = 1$$

となるから，$1-L_1: L_1 \to L_1$ は線型同相写像で，$(1-L_1)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} L_1{}^k$ となる．したがって，$\|(1-L_1)^{-1}\| \leqq (1-a)^{-1}$ となる．

同様にして，$-\sum_{k=1}^{\infty} L_2{}^{-k}$ は $\mathcal{L}(E_2; E_2)$ で絶対収束して，$1-L_2: E_2 \to E_2$ の逆写像となることがわかる．そして，

$$\|(1-L_2)^{-1}\| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \|L_2{}^{-1}\|^k \leqq a(1-a)^{-1} < (1-a)^{-1}$$

となる．

以上から，$1-L: E \to E$ も線型同相写像で，$\|(1-L)^{-1}\| \leqq (1-a)^{-1}$ となることがわかる．▌

定理 1 $L: E \to E$ を双曲型線型同相写像とし，a, $(0<a<1)$ をその歪度とする．いま正数 d に対して $\mathcal{BC}^0(E; E)$ の部分集合 $\mathcal{N}_d$ を $\mathcal{N}_d = \{f \in \mathcal{BC}^0(E; E);$ f は Lipschitz 写像であって $\mathrm{Lip}(f) \leqq d\}$ と定義する．

いま，$0<d<\min\{1-a, \|L^{-1}\|^{-1}\}$ とすると，$\mathcal{N}_d$ の任意の 2 元 $f, \tilde{f}$ に対して

$(*)$ $(L+f)(1+g) = (1+g)(L+\tilde{f})$

をみたす $g \in \mathcal{BC}^0(E; E)$ が，ただ 1 つ存在する．

このとき，$h=1+g: E \to E$ は同相写像であって，$\tilde{f} \in \mathcal{N}_d$ を固定し，$f \in \mathcal{N}_d$ に対して $(*)$ をみたす $g \in \mathcal{BC}^0(E; E)$ を対応させる写像を $\theta_f: \mathcal{N}_d \to \mathcal{BC}^0(E; E)$ とすると，θ_f は Lipschitz 写像である．

この定理は，$L+f$ と $L+\tilde{f}$ が位相的に共役であることを主張するものであるが，さらに $\tilde{f}=0$ とおいて，つぎの系を得る．

系 L, a, d を定理 1 の条件をみたすものとする．このとき，任意の $f \in \mathcal{N}_d$ に対して

$(*)'$ $(L+f)(1+g) = (1+g)L$

をみたす $g \in \mathcal{BC}^0(E; E)$ が，ただ 1 つ存在する．

そして，$h=1+g: E \to E$ は同相写像であって，$f \in \mathcal{N}_d$ に対して $(*)'$ をみたす $g \in \mathcal{BC}^0(E; E)$ を対応させる写像を $\theta: \mathcal{N}_d \to \mathcal{BC}^0(E; E)$ とすると，θ は Lipschitz 写像である．

定理 1 の証明 $f, \tilde{f} \in \mathcal{N}_d$ とし，$(*)$ をみたす $g \in \mathcal{BC}^0(E; E)$ を求めよう．

第6章§3定理1から，$L+\tilde{f}: E\to E$ は Lipschitz 同相写像である．したがって，$(*)$を書き直して

$$(L+f)(1+g)(L+\tilde{f})^{-1} = (L+\tilde{f})(L+\tilde{f})^{-1}+g$$

となる．これから

(1)　$(Lg+f(1+g)-\tilde{f})(L+\tilde{f})^{-1} = g$

を得る．

いま，$g\in\mathcal{BC}^0(E;E)$に対して

(2)　$\lambda(g) = Lg(L+\tilde{f})^{-1},\qquad \mu(g) = (f(1+g)-\tilde{f})(L+\tilde{f})^{-1}$

とおくと，$\lambda(g), \mu(g)\in\mathcal{BC}^0(E;E)$となる．したがって写像 $\lambda, \mu: \mathcal{BC}^0(E;E)\to\mathcal{BC}^0(E;E)$が定義され，(1)式はつぎのように書き直される．

(3)　$(\lambda+\mu)(g) = g$

つぎに，(2)から λ は線型同相写像であって，$\lambda^{-1}(g)=L^{-1}g(L+\tilde{f})$で与えられることがわかる．そして，$E_1, E_2$ が E の L 不変な閉部分ベクトル空間であることから，$\mathcal{BC}^0(E;E_1)$と $\mathcal{BC}^0(E;E_2)$は $\mathcal{BC}^0(E;E)$の λ 不変な閉部分ベクトル空間となる．そして代数的に $\mathcal{BC}^0(E;E)$が $\mathcal{BC}^0(E;E_1)$ と $\mathcal{BC}^0(E;E_2)$ の直和となることはすぐわかる．ゆえに，開写像定理系2から，$\mathcal{BC}^0(E;E)=\mathcal{BC}^0(E;E_1)\oplus\mathcal{BC}^0(E;E_2)$（位相直和）となる．

いま，

$$\lambda_1 = \lambda|\mathcal{BC}^0(E;E_1):\ \mathcal{BC}^0(E;E_1)\to\mathcal{BC}^0(E;E_1),$$
$$\lambda_2 = \lambda|\mathcal{BC}^0(E;E_2):\ \mathcal{BC}^0(E;E_2)\to\mathcal{BC}^0(E;E_2)$$

とおくと，定理の仮定と(2)から，$\|\lambda_1\|\leqq\|L_1\|\leqq a$，$\|\lambda_2{}^{-1}\|\leqq\|L_2{}^{-1}\|\leqq a$ がわかる．したがって，§1定理1から，λ は双曲型線型同相写像で，その歪度を a' とすると，$a'\leqq a$ となる．したがって補題1から，$1-\lambda: \mathcal{BC}^0(E;E)\to\mathcal{BC}^0(E;E)$は線型同相写像で $\|(1-\lambda)^{-1}\|\leqq(1-a')^{-1}\leqq(1-a)^{-1}$ となる．

つぎに，$g, g'\in\mathcal{BC}^0(E;E)$とすると

$$\begin{aligned}\|\mu(g)-\mu(g')\| &= \|(f(1+g)-f(1+g'))(L+\tilde{f})^{-1}\|\\ &= \|f(1+g)-f(1+g')\|\leqq \mathrm{Lip}\,(f)\|g-g'\|\leqq d\|g-g'\|\end{aligned}$$

となる．したがって，$\mu: \mathcal{BC}^0(E;E)\to\mathcal{BC}^0(E;E)$は Lipschitz 写像であって，

$\mathrm{Lip}(\mu) \leqq d$ となる.

以上から，(3) を書き直して

(4)　$(1-\lambda)^{-1}\mu(g) = g$

を得るが，ここで，$(1-\lambda)^{-1}\mu$ は第6章§2命題2から Lipschitz 写像であって

(5)　$\mathrm{Lip}((1-\lambda)^{-1}\mu) \leqq \|(1-\lambda)^{-1}\|\mathrm{Lip}(\mu) \leqq (1-a)^{-1}d$

となる．仮定から，$(1-a)^{-1}d<1$ となるから，$(1-\lambda)^{-1}\mu$ は縮小写像である．したがって，(4) はただ1つの解 $g \in \mathcal{BC}^0(E;E)$ をもつ．

以上で，(∗) をみたす $g \in \mathcal{BC}^0(E;E)$ が，ただ1つ存在することがわかった．

つぎに，f と $\tilde{f}$ を入れかえて

(6)　$(L+\tilde{f})(1+\tilde{g}) = (1+\tilde{g})(L+f)$

をみたす $\tilde{g} \in \mathcal{BC}^0(E;E)$ が，ただ1つ存在することがわかる．すると (∗) および (6) から

(7)　$(L+f)(1+g)(1+\tilde{g}) = (1+g)(1+\tilde{g})(L+f)$

がわかる．しかるに，(7) の解は一意的だから，$(1+g)(1+\tilde{g})=1$ となる．

同様にして，$(1+\tilde{g})(1+g)=1$ がわかるので，$h=1+g$ は同相写像となる．

$\tilde{f} \in \mathcal{N}_d$ を固定する．そして，$f \in \mathcal{N}_d$ に対する (∗) の解 $g \in \mathcal{BC}^0(E;E)$ を $\theta_f(f)$ と表わす．すると，$g=\theta_f(f)$ は (4) をみたす．

いま，$T: \mathcal{N}_d \times \mathcal{BC}^0(E;E) \to \mathcal{BC}^0(E;E)$ を

(8)　$T(f,g) = (1-\lambda)^{-1}\{(f(1+g)-\tilde{f})(L+\tilde{f})^{-1}\}$

と定義すると，これはうまく定義される．$f \in \mathcal{N}_d$ に対して $T_f: \mathcal{BC}^0(E;E) \to \mathcal{BC}^0(E;E)$ を $T_f(g) = T(f,g)$，$g \in \mathcal{BC}^0(E;E)$ と定義すると，(2), (4) から，$\theta_f(f)$ は T_f の不動点である．すなわち，$\theta_f: \mathcal{N}_d \to \mathcal{BC}^0(E;E)$ は T の不動点写像である．

さらに，(5) から T_f は縮小写像で，T が第2成分に関して一様縮小であることがわかる．また，(8) から

$$\|T(f,g)-T(f',g)\| \leqq \|(1-\lambda)^{-1}\|\|f(1+g)-f'(1+g)\| \leqq (1-a)^{-1}\|f-f'\|$$

がわかる．したがって，(5) から

$$\begin{aligned}\|T(f,g)-T(f',g')\| &\leqq \|T(f,g)-T(f',g)\|+\|T(f',g)-T(f',g')\|\\ &\leqq (1-a)^{-1}\|f-f'\|+(1-a)^{-1}d\|g-g'\|\\ &\leqq 2(1-a)^{-1}\|(f,g)-(f',g')\|\end{aligned}$$

がわかる．すなわち，T は Lipschitz 写像である．

以上から，第6章§2定理2を用いて，θ_f が Lipschitz 写像となることがわかる．▌

定理1の証明と全く同様にして，つぎの定理がわかる．

定理 1′　$L:E\to E$ を双曲型線型同相写像，その歪度を a, $(0<a<1)$ とする．いま，正数 d に対して，$\mathcal{N}_d'$ を $\mathcal{L}(E;E)$ の原点を中心とする半径 d の閉球，すなわち $\mathcal{N}_d'=\{f\in\mathcal{L}(E;E);\ \|f\|\leqq d\}$ とする．

いま，$0<d<\min\{1-a,\|L^{-1}\|^{-1}\}$ とすると，$\mathcal{N}_d'$ の任意の2元 $f,\tilde{f}$ に対して

(＊)　$(L+f)(1+g)=(1+g)(L+\tilde{f})$

をみたす $g\in\mathcal{L}(E;E)$ が，ただ1つ存在する．

そして，$h=1+g:E\to E$ は線型同相写像であって，$\tilde{f}\in\mathcal{N}_d'$ を固定して，$f\in\mathcal{N}_d'$ にたいして(＊)をみたす $g\in\mathcal{L}(E;E)$ を対応させる写像を $\theta_{\tilde{f}}':\mathcal{N}_d'\to\mathcal{L}(E;E)$ とすると，$\theta_{\tilde{f}}'$ は Lipschitz 写像である．

系 1　L,a,d を定理 1′ の条件をみたすものとする．このとき，

(＊)′　$(L+f)(1+g)=(1+g)L$

をみたす $g\in\mathcal{L}(E;E)$ が，ただ1つ存在する．

そして，$h=1+g$ は線型同相写像である．さらに，$f\in\mathcal{N}_d'$ に対して(＊)′をみたす $g\in\mathcal{L}(E;E)$ を対応させる写像を $\theta':\mathcal{N}_d'\to\mathcal{L}(E;E)$ とすると，θ' は Lipschitz 写像である．

また，このとき，$L+f$ は双曲型線型同相写像である．

系1の証明　最後の部分だけ示せば十分である．

(＊)′から $L+f=(1+g)L(1+g)^{-1}$ となるから，$\sigma(L)=\sigma(L+f)$ となる．したがって，L が双曲型だから，$L+f$ も双曲型である．▌

系 2　Banach 空間 E の双曲型線型同相写像全体の集合 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(E;E)$ の開集合である．

証明 系1から明らかである. ∎

補題 2 E を Banach 空間, V は原点を中心とする半径 2ρ, $(\rho>0)$ の開球を含む E の部分集合とする. V から E への C^r 写像全体の集合を $\mathscr{C}^r(V;E)$ として $(r\geqq 1)$, 正数 ε に対して

$$\mathscr{N}_\varepsilon' = \{f \in \mathscr{C}^r(V;E);\ f(0)=0,\ \|x\| \leqq \rho \text{ ならば } \|Df(x)\| \leqq \varepsilon\}$$

とおく.

このとき, つぎの性質をみたす写像 $\Phi: \mathscr{N}_\varepsilon' \to \mathscr{B}\mathscr{C}^0(E;E)$ が存在する.

(1) 適当な正の定数 K があって, $f \in \mathscr{N}_\varepsilon'$ に対して $\tilde{f}=\Phi(f)$ は Lipschitz 写像であって, $\mathrm{Lip}(\tilde{f}) \leqq K\varepsilon$ となる.

(2) $\|x\| \leqq \rho/2$ ならば $\tilde{f}(x)=f(x)$, $\|x\| \geqq \rho$ ならば $\tilde{f}(x)=0$ であって, $\|\tilde{f}\| =\sup\{\|\tilde{f}(x)\|;\ x \in E\} \leqq \varepsilon\rho$ となる.

(3) $f, f' \in \mathscr{N}_\varepsilon'$ に対して, $\tilde{f}=\Phi(f)$, $\tilde{f}'=\Phi(f')$ とおくと

$$\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}'(x)\| \leqq \|f(x)-f'(x)\|, \qquad x \in E$$

が成立する.

証明 第7章§6補題1から, つぎの性質をみたす C^∞ 級関数 $\alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が存在する.

$$\begin{array}{lll} |t| \leqq 1/2 & \text{ならば} & \alpha(t)=1, \\ 1/2<|t|<1 & \text{ならば} & 0<\alpha(t)<1, \\ |t| \geqq 1 & \text{ならば} & \alpha(t)=0 \end{array}$$

そこで, $k=\sup\{|D\alpha(t)|;\ t \in \boldsymbol{R}\}$ とおくと, $2<k<\infty$ となる.

いま, $f \in \mathscr{N}_\varepsilon$ に対して, $\tilde{f}=\Phi(f): E \to E$ を

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \alpha(\|x\|/\rho) f(x), & \|x\| \leqq \rho, \\ 0, & \|x\| > \rho \end{cases}$$

と定義すると, $\|x\| \leqq \rho/2$ ならば $\tilde{f}(x)=f(x)$; $\|x\| \geqq \rho$ ならば $\tilde{f}(x)=0$ となる. また, $\|x\| \leqq \rho$ ならば補題2の仮定と平均値の定理から

$$\|\tilde{f}(x)\| \leqq \|f(x)\| = \|f(x)-f(0)\| \leqq \varepsilon\|x\| \leqq \varepsilon\rho$$

となる. したがって(2)が成立する.

$f, f' \in \mathscr{N}_\varepsilon'$ に対して, $\tilde{f}=\Phi(f)$, $\tilde{f}'=\Phi(f')$ とおくと,

$\|x\| \leqq \rho$　ならば

$$\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}'(x)\| = \alpha(\|x\|/\rho)\|f(x)-f'(x)\| \leqq \|f(x)-f'(x)\|$$

となるから，(3)が成立する．

つぎに，$\|x\|\leqq\rho$, $\|x'\|\leqq\rho$ とする．このとき，上に証明したように，$\|f(x)\| \leqq\varepsilon\rho$ となることに注意すると，平均値の定理から

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x')\| &\leqq \|\alpha(\|x\|/\rho)f(x)-\alpha(\|x'\|/\rho)f(x)\| \\ &\quad +\|\alpha(\|x'\|/\rho)f(x)-\alpha(\|x'\|/\rho)f(x')\| \\ &= |\alpha(\|x\|/\rho)-\alpha(\|x'\|/\rho)|\|f(x)\|+\alpha(\|x'\|/\rho)\|f(x)-f(x')\| \\ &\leqq k\frac{|\|x\|-\|x'\||}{\rho}\varepsilon\rho+\|f(x)-f(x')\| \\ &\leqq k\varepsilon\|x-x'\|+\varepsilon\|x-x'\| = (k+1)\varepsilon\|x-x'\|\end{aligned}$$

となる．したがって，$K=k+1$ とおくと，$\|x\|\leqq\rho$, $\|x'\|\leqq\rho$ のとき(1)が成立する．

いま，$\|x\|>\rho$, $\|x'\|>\rho$ とすると，定義から，明らかに(1)が成立する．

最後に，$\|x\|\leqq\rho$, $\|x'\|>\rho$ とすると，$\|f(x)\|\leqq\varepsilon\rho$ と平均値の定理から

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(x')\| &= \|\tilde{f}(x)\| = \|(\alpha(\|x\|/\rho)-\alpha(1))f(x)\| \\ &= |\alpha(\|x\|/\rho)-\alpha(1)|\|f(x)\| \\ &\leqq k\frac{\rho-\|x\|}{\rho}\varepsilon\rho \leqq k\varepsilon(\|x'\|-\|x\|) \leqq K\varepsilon\|x-x'\|\end{aligned}$$

となる．▌

E を Banach 空間，U を点 $p\in E$ の開近傍とし，$\phi: U\to E$ を C^r 写像($r\geqq 1$)とする．いま，$\phi(p)=p$ であって，$L=D\phi(p): E\to E$ が双曲型線型同相写像となるとき，p を ϕ の**双曲型不動点**という．

$L=D\phi(p)$に関する E の L 不変な位相直和分解を $E=E^s\oplus E^u$ とする．このとき，$E^s=\{0\}$ なら p は ϕ の**源点**，$E^u=\{0\}$ ならば p は ϕ の**沈点**，$E^s\neq\{0\}$ かつ $E^u\neq\{0\}$ ならば p を ϕ の**鞍点**という．

定理2　(**写像に対する Hartman の定理**)　E を Banach 空間，V を E の原点0の開近傍とする．いま C^r 写像 $\phi: V\to E$, $r\geqq 1$ に対して，0がその双曲型不動点とする．このとき，適当な正数 β と適当な同相写像 $h: E\to E$ があって，つぎの条件(＊)をみたす．

(＊) $h(0)=0$ であって，$\|x\|\leqq\beta$ ならば $\phi(x)=hLh^{-1}(x)$ となる．ただし，$L=D\phi(0)$ とする．

さらに，原点を中心とする半径 β の閉球の上で，ϕ の不動点は原点ただ 1 つである．

証明 仮定から，$L=D\phi(0)$ は双曲型である．その歪度を a, $(0<a<1)$ とし，正数 d を $0<d<\min\{1-a, \|L^{-1}\|^{-1}\}$ となるようにとる．

いま，$f=\phi-L$，すなわち $\phi=L+f$，とおくと，$f: V\to E$ は C^r 写像であって，$f(0)=0$, $Df(0)=D\phi(0)-L=0$ となる．したがって，Df の連続性から，適当な正数 ρ をとると

$$\|x\|\leqq\rho \quad ならば \quad \|Df(x)\|\leqq d/K$$

とできる．

また ρ を十分小さくとって，V は原点を中心とする半径 2ρ の開球を含むものとしてよい．すると，補題 2 により，$\tilde{f}=\Phi(f): E\to E$ は有界な Lipschitz 写像で，$\mathrm{Lip}(\tilde{f})\leqq d$ となる．

いま，$\tilde{\phi}=L+\tilde{f}: E\to E$ とおくと，定理 1 が適用できて，適当な同相写像 h: $E\xrightarrow{\bullet}E$ が存在して

(1) $\tilde{\phi}h=hL$, すなわち $\tilde{\phi}=hLh^{-1}$

となる．

(1)式から直ちに，$h(\mathrm{Fix}(L))=\mathrm{Fix}(\tilde{\phi})$ がわかる．すなわち，h は L の不動点全体の集合から $\tilde{\phi}$ の不動点全体の集合への全単射をひき起こす．

$\|x\|\leqq\rho/2$ のとき $\tilde{f}(x)=f(x)$ であるから，

(2) $\|x\|\leqq\rho/2$ ならば $\tilde{\phi}(x)=\phi(x)$

が成立する．したがって，0 は $\tilde{\phi}$ の不動点である．一方，L は双曲型だから，$\mathrm{Fix}(L)=\{0\}$ となり，上に述べたことから，$\mathrm{Fix}(\tilde{\phi})=\{0\}$ であって，$h(0)=0$ となることがわかる．最後に，(1), (2) から，$\|x\|\leqq\rho/2$ なら $\phi(x)=\tilde{\phi}(x)=hLh^{-1}(x)$ となる．したがって，$\beta=\rho/2$ として(＊)が成立する．▮

注意 1 定理 2 で ϕ は C^r 写像としたが，逆関数の定理から，ϕ は原点の近傍から原点の近傍への C^r 微分同相写像である．

定理 3　(**双曲型不動点の局所安定性**)　E を Banach 空間，V を E の原点 0 の開近傍とする．そして，$\phi: V \to E$ は C^r 有界で($r \geqq 1$)，0 をその双曲型不動点にもつものとする．

このとき，適当な正数 δ があって，$\|\psi-\phi\|_r \leqq \delta$ となる任意の $\psi \in \mathcal{BC}^r(V; E)$ に対して，適当な正数 β と適当な同相写像 $h: E \to E$ をとると

(＊)　$\|x-h(0)\| \leqq \beta$　ならば　$\psi(x) = h\phi h^{-1}(x)$

が成立する．

そして，ψ は $h(0)$ を中心とする半径 β の閉球上で $h(0)$ だけを不動点にもつ．$\mathcal{BC}^r(V; E)$ における ϕ を中心とする半径 δ の閉球を $\mathcal{N}$ とするとき，$\psi \in \mathcal{N}$ に対して，その不動点 $h(0) \in E$ を対応させる写像は連続である．

証明　仮定から $L = D\phi(0)$ は双曲型である．E の双曲型線型同相写像全体の集合 $\mathcal{H}$ は $\mathcal{L}(E; E)$ の開集合だから，適当な正数 d_1 があって，$\|L_1-L\| < d_1$ となる $L_1 \in \mathcal{L}(E; E)$ は $\mathcal{H}$ に属するようにできる．

$D\phi$ は連続で，$D\phi(0) = L$ だから，適当な正数 ρ_1, $(0 < \rho_1 < 1)$ をとると，$\|x\| < \rho_1$ ならば $x \in V$ で，$\|D\phi(x) - L\| < d_1/2$ とできる．

いま，$0 < \delta < d_1/2$ とし，C^r 写像 $\psi: V \to E$ を $\|\psi-\phi\|_r \leqq \delta$ をみたすものとすると，$\|x\| < \rho_1$ ならば

$$\|D\psi(x) - L\| \leqq \|D\psi(x) - D\phi(x)\| + \|D\phi(x) - L\| < \delta + d_1/2 < d_1$$

となる．したがって，$D\psi(x) \in \mathcal{H}$ となる．すなわち，

(1)　$0 < \delta < d_1/2,\ \|\psi-\phi\|_r < \delta,\ \|x\| < \rho_1$　ならば　$D\psi(x) \in \mathcal{H}$

が成立する．

いま，L の歪度を a, $(0 < a < 1)$ とする．そして

(2)　$0 < d < \min\{1-a, \|L^{-1}\|^{-1}\}$

をみたす d をとる．

いま $f_1 = \phi - L$，すなわち $\phi = L + f_1$ とおくと，$\phi(0) = 0$ から $f_1(0) = 0$ となり，さらに $Df_1(0) = D\phi(0) - L = 0$ となる．Df_1 は連続だから，適当な正数 ρ_2, $(0 < \rho_2 < \rho_1/2)$ をとって，$\|x\| < \rho_2$ ならば $\|Df_1(x)\| \leqq d/2K$ が成立するようにできる．ここで，K は補題 2 の定数とする．

すると，補題2から，有界な Lipschitz 写像 $\tilde{f}_1=\Phi(f_1):E\to E$ があって，

(3) $\mathrm{Lip}(\tilde{f}_1)\leqq d/2$ であって，$\|x\|\leqq \rho_2/2$ ならば $\tilde{f}_1(x)=f_1(x)$

となる．

$\mathcal{N}_d=\{f\in\mathcal{BC}^0(E;E)$; f は Lipschitz 写像で $\mathrm{Lip}(f)\leqq d\}$ とおくと，$\tilde{f}_1\in\mathcal{N}_d$ となるが，(2)と定理1から，$\mathcal{N}_d$ に属する任意の f に対して，

(4) $(L+f)(1+g)=(1+g)(L+\tilde{f}_1)$

をみたす $g\in\mathcal{BC}^0(E;E)$ が一意的に定まり，$h=1+g$ は同相写像である．$f\in\mathcal{N}_d$ に対して，この $g\in\mathcal{BC}^0(E;E)$ を対応させる写像 $\theta=\theta_{f_1}:\mathcal{N}_d\to\mathcal{BC}^0(E;E)$ は Lipschitz 写像となる．

θ の定義から，$\theta(\tilde{f}_1)=0$ となり，θ の連続性から，適当な正数 d_2 があって，

(5) $\|f-\tilde{f}_1\|<d_2,\quad f\in\mathcal{N}_d$ ならば $\|\theta(f)\|<\rho_2/2$

となる．

いま正数 δ をつぎのように定める．

(6) $0<\delta<\min\{d/2K, d_1/2, d_2/2\}$

そして，$\psi\in\mathcal{BC}^r(V;E)$ を $\|\psi-\phi\|_r\leqq\delta$ をみたすものとする．このとき，$t:V\to E$ を $t(x)=\psi(x)-\phi(x)-\psi(0)$ とおくと，$\phi(0)=0$ から $t(0)=0$ となり

$$\|Dt(x)\|=\|D\psi(x)-D\phi(x)\|\leqq\|\psi-\phi\|_r\leqq\delta$$

となる．したがって，補題2から，$\tilde{t}=\Phi(t)$ として，

(7) $\|\tilde{t}\|\leqq\delta\rho_2<\delta,\qquad \mathrm{Lip}(\tilde{t})\leqq K\delta<d/2$

および

(8) $\|x\|\leqq\rho_2/2$ ならば $\tilde{t}(x)=t(x)$

が成立する．

いま，$f:E\to E$ を $f(x)=\tilde{f}_1(x)+\tilde{t}(x)+\psi(0)$ と定義すると，$\|x\|\leqq\rho_2/2$ のとき，(8), (3)から

$$\begin{aligned}f(x)&=f_1(x)+t(x)+\psi(0)\\&=(\phi(x)-L(x))+(\psi(x)-\phi(x)-\psi(0))+\psi(0)=\psi(x)-L(x)\end{aligned}$$

となる．したがって，つぎの式が成立する．

(9) $\|x\|\leqq\rho_2/2$ ならば $\psi(x)=(L+f)(x)$

f の定義式から，f は Lipschitz 写像であって，(3), (7) から

$$\mathrm{Lip}(f) \leqq \mathrm{Lip}(\tilde{f}_1)+\mathrm{Lip}(\tilde{t}) \leqq d/2+d/2 = d$$

となる．したがって，$f \in \mathcal{N}_d$ であって，$\theta(f)=g$ とおくと，(4)が成立する．そして，$h=1+g: E \to E$ は同相写像であって，

(10) $L+f = h(L+\tilde{f}_1)h^{-1}$

が成立する．

さらに，(6), (7) から

$$\|f(x)-\tilde{f}_1(x)\| = \|\tilde{t}(x)+\psi(0)\| \leqq \|\tilde{t}(x)\|+\|\psi(0)\|$$
$$\leqq \delta+\|\psi(0)-\phi(0)\| \leqq \delta+\|\psi-\phi\|_r \leqq 2\delta < \delta_2$$

となる．したがって，(5)から $\|g\|<\rho_2/2$ となる．ゆえに

(11) $\|h(0)\| = \|g(0)\| \leqq \|g\| < \rho_2/2$

が成立する．

いま，原点を中心とする半径 $\rho_2/2$ の開球を W とし，$V_1=h(W)\cap W$ とおくと，(11)から，V_1 は $h(0)$ の開近傍である．したがって，適当な正数 β をとって，$\|x-h(0)\|\leqq\beta$ ならば $x \in h(W)\cap W$ とできる．すると，$h^{-1}(x) \in W$ となるから，(3), (9), (10)から，

$$\psi(x) = h(L+f_1)h^{-1}(x) = h\phi h^{-1}(x)$$

となる．すなわち，定理3の(＊)がわかった．

また，$\phi(0)=0$ と(＊)から，$h(0)$が ψ の不動点となることがわかる．定理2から ϕ は原点の適当な近傍で，0をただ1つの不動点とするから，(＊)によって，β を十分小さくとれば，$h(0)$を中心とする半径 β の閉球の上で，ψ が0をただ1つの不動点とすることがわかる．

また，(11)から $\|h(0)\|<\rho_2/2<\rho_2<\rho_1$ となり，(1), (6)から $D\psi(h(0))$ は双曲型となる．すなわち，$h(0)$は ψ の双曲型不動点である．

いま，$\mathcal{BC}^r(V;E)$ の ϕ を中心とする半径 δ の閉球を $\mathcal{N}$ とする．そうすると補題2から，$\psi \in \mathcal{N}$ に対して上のような $f \in \mathcal{N}_d$ を対応させる写像は連続となる．したがって $\psi \in \mathcal{N}_d$ に対して $g=\theta(f) \in \mathcal{BC}^0(E;E)$ を対応させる写像も連続となる．そこで，$\mathrm{ev}^0(g)=g(0)$，$g \in \mathcal{BC}^0(E;E)$ によって定義される写像

$ev^0 : \mathcal{BC}^0(E;E) \to E$ は連続線型写像であるから，$f \in \mathcal{N}_d$ に対して $g(0)=h(0) \in E$ を対応させる写像も連続である．▌

つぎに，常微分方程式に関する Hartman の定理を証明しよう．ここでは，簡単のため E を有限次元とする．したがって，$E=\boldsymbol{R}^n$ とし，そのノルムは $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$ で与えられるものとする．

いま，V を E の原点の近傍とし，$v: V\to E$ を V 上の C^1 ベクトル場で $v(0)=0$ となるものとする．$L=Dv(0): E\to E$ とおき，$f=v-L: V\to E$ とおくと，$v=L+f$ となり，$f(0)=0$，$Df(0)=0$ となる．

b を正数とし，$E(b)$ を原点を中心とする半径 b の E の閉球とする．V は原点の近傍だから，十分小さい正数 b をとると $E(2b)\subset V$ とできる．そして，$Df(0)=0$ で Df は連続だから，b を十分小さくとれば，$\|x\|\leqq 2b$ ならば，$\|Df(x)\|\leqq 1$ とできる．すると，$v|E(2b)=(L+f)|E(2b)$ は Lipschitz 写像で，

$$\mathrm{Lip}(v|E(2b)) \leqq \|L\|+\|Df|E(2b)\| \leqq \|L\|+1$$

となる(第6章§2命題2，補題1)．また $v(0)=0$ から，$\mathrm{Lip}(v|E(2b))\leqq\|L\|+1$ と合わせて，$\|v|E(2b)\|\leqq 2b(\|L\|+1)$ となる．

いま，$c=\{6(\|L\|+1)\}^{-1}$ とおき，$I=[-2c,2c]$ とおくと，第6章§4定理1，2から，つぎの条件(＊)をみたす C^1 写像 $\phi^{(v)}: I\times E(b)\to E(2b)$ が存在する．

(＊)　$x\in E(b)$ に対して $\phi^{(v)x}: I\to E(2b)$ を $\phi^{(v)x}(t)=\phi^{(v)}(t,x)$，$t\in I$ と定義すると，これは初期条件を x とする v の積分曲線である．

いま，$t\in I$ に対して $\phi_t^{(v)}: E(b)\to E(2b)$ を $\phi_t^{(v)}(x)=\phi^{(v)}(t,x)$，$x\in E(b)$ と定義すると，これは C^1 級で，$v=L$ のとき，§1定理3から，$\phi_t^{(L)}(x)=(\exp tL)(x)$ となる．

以上の仮定と記号のもとで，つぎの定理が成立する．

定理 4　いま $L=Dv(0): E\to E$ のスペクトル $\sigma(L)$ が実数部分が零の複素数を含まないものとする．

このとき，十分小さな正数 γ と，原点を保つ E の同相写像 $h: E\to E$ が存在して，$\|x\|\leqq\gamma$，$-c\leqq t\leqq c$ ならば

$$\phi^{(L)}(t,h(x)) = h\phi^{(v)}(t,x)$$

が成立する.

注意 2 §1補題4から, L に関する条件は, $\exp L$ が双曲型線型同相写像ということと同じである. また, この定理は, v と $L=Dv(0)$ の生成する力学系は, 原点の近傍で位相的に同値であることを示すものである.

証明 $k=\|L\|+1$ とし, $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{k,2bk}'$ を, つぎの条件(1), (2)をみたす C^1 写像 $v':E(2b)\to E$ 全体の集合とする.

(1) v' は Lipschitz 写像で $\mathrm{Lip}(v')\leqq k$,

(2) $\|v'\|\leqq 2bk$

E は有限次元で $E(2b)$ はコンパクトだから, $E(2b)$ で定義される任意の C^1 写像は C^1 有界かつ一様 C^1 級となる(第6章§1命題3).

各 $t\in I$ に対して, 写像 $c_t:\mathcal{U}\to\mathcal{BC}^1(E(b)\,;E(2b))$ を $c_t(v')=\phi_t^{(v')}$, $v'\in\mathcal{U}$ と定義すると, 第6章§4定理3から, c_t は連続となる.

定理の仮定と§1命題3から, $\exp cL:E\to E$ は双曲型線型同相写像となる. したがって, §1定理1から, $\|\cdot\|$ と同値な適当なノルム $\|\cdot\|'$ が存在して, このノルムに関して, L の歪度が a, $(0<a<1)$ となる. $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ が同値だから, 適当な正数 α,β があって

(3) $\alpha\|x\|\leqq\|x\|'\leqq\beta\|x\|,\qquad x\in E$

となる. すると簡単な計算から, 任意の連続線型写像 $L:E\to E$ に対して, つぎの不等式が成立することがわかる.

(4) $(\alpha/\beta)\|L\|\leqq\|L\|'\leqq(\beta/\alpha)\|L\|$

いま, 定数 d をつぎのように定める.

(5) $0<d<\min\{1-a,\ (\|L^{-1}\|')^{-1}\}$

各 $t\in I$ に対して $c_t:\mathcal{U}\to\mathcal{BC}'(E(b)\,;E(2b))$ が連続だから, 特に, $t=c$ として, 十分小さな ε, $(0<\varepsilon<1)$ をとると, $\|v'-L\|_1\leqq\varepsilon$ をみたす C^1 写像 $v':E(2b)\to E$ に対して,

$$\|\phi_c^{(v')}-\phi_c^{(L)}\|_1\leqq\min\{\alpha/\beta,1/\beta\}d$$

が成立する. すると, (3), (4)から $\|\phi_c^{(v')}-\phi_c^{(L)}\|_1'\leqq d$ が成立する. すなわち

(6) 適当な正数 ε, $(0<\varepsilon<1)$ があって, $\|v'-L\|_1\leqq\varepsilon$, $v'\in\mathcal{BC}^1(E(2b)\,;E)$ な

らば $\|\phi_c^{(v')}-\phi_c^{(L)}\|_1'\leqq d$ となる.

$f=v-L$ において, $f(0)=0$, $Df(0)=0$ で, f, Df は連続だから, 適当な正数 ρ, $(\rho\leqq\min\{1, b\})$ があって, $\|x\|\leqq\rho$ ならば, $\|f\|_1=\|v-L\|_1\leqq\varepsilon/K$ とできる (ここで K は補題2の定数とする). いま, 補題2を f に適用すると, $\tilde{f}=\Phi(f): E\to E$ を得る. すると, $\tilde{f}$ は Lipschitz 写像で

(7) $\mathrm{Lip}(\tilde{f})\leqq\varepsilon,\quad \|\tilde{f}\|\leqq\varepsilon\rho\leqq\varepsilon$

であって

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \|x\|\leqq\rho/2, \\ 0, & \|x\|\geqq\rho \end{cases}$$

となる. そして, 補題の証明と, $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ であることから, $\tilde{f}$ は C^1 級であることがわかる.

さらに, (7) と第6章§2補題1から, $\|\tilde{f}\|_1\leqq\varepsilon$ となる. したがって, $\tilde{v}=L+\tilde{f}$ とおくと, つぎのことが成立する.

(8) $\|\tilde{f}\|_1=\|\tilde{v}-L\|_1\leqq\varepsilon,$

$$\tilde{v}(x)=\begin{cases} v(x), & \|x\|\leqq\rho/2, \\ L(x), & \|x\|\geqq\rho \end{cases}$$

したがって, (6) から, つぎのことが成立する.

(9) $\|\phi_c^{(\tilde{v}|E(2b))}-\phi_c^{(L)}\|_1'\leqq d$

$t\in I$ に対して実数 $\|(\exp tL)^{-1}\|^{-1}$ を対応させる関数は連続で, I はコンパクトだから, $m_0=\min\{\|(\exp tL)^{-1}\|^{-1};\ t\in I\}$ は存在して, $m_0>0$ となる. そこで, 必要なら ρ をさらに小さくとって, $\rho\leqq m_0 b$ をみたすようにすると, 第6章§3補題1から, $\|x\|\geqq b$ ならば $t\in I$ として

$$\|\phi_t^{(L)}(x)\|=\|(\exp tL)(x)\|\geqq\|(\exp tL)^{-1}\|^{-1}\|x\|\geqq m_0 b\geqq\rho$$

となる. すなわち, つぎのことが成立する.

(10) $\|x\|\geqq b,\ t\in I$ ならば $\|\phi_t^{(L)}(x)\|\geqq\rho$

そこで, $\phi: I\times E\to E$ を

$$(11)\quad \phi(t, x)=\begin{cases} \phi^{(\tilde{v}|E(2b))}(t, x), & x\in E(b), \\ \phi^{(L)}(t, x), & x\notin E(b) \end{cases}$$

と定義し，各 $x\in E$ に対して，$\phi^x:I\to E$ を $\phi^x(t)=\phi(t,x)$，$t\in I$ と定義する．このとき，$\rho\leqq b$ に注意すると，(8), (10)から，ϕ^x は x を初期条件とする $\tilde{v}$: $E\to E$ の積分曲線であることがわかる．したがって，第6章§4定理1, 2から，$\phi=\phi^{(\tilde{v})}$ であって，ϕ は C^1 級である．

第7章§4定理1の証明の前半と同様にして，つぎのことが成立する．

(12)　$t_1, t_2, t_1+t_2\in I$ 　ならば　$\phi_{t_1}{}^{(\tilde{v})}\phi_{t_2}{}^{(\tilde{v})}=\phi_{t_1+t_2}{}^{(\tilde{v})}$

(13)　$\phi_0{}^{(\tilde{v})}=1$

したがって，特に，$t\in I$ なら $(\phi_t{}^{(\tilde{v})})^{-1}=\phi_{-t}{}^{(\tilde{v})}$ が成立する．

いま，$\lambda_t=\phi_t{}^{(\tilde{v})}-\phi_t{}^{(L)}:E\to E$，$t\in I$ とおくと，(11)から，

$$(14)\quad \lambda_t(x)=\begin{cases}\phi_t{}^{(\tilde{v}|E(2b))}-\phi_t{}^{(L)}, & x\in E(b),\\ 0, & x\notin E(b)\end{cases}\qquad (t\in I)$$

が成立する．したがって，$\lambda_t\in\mathcal{BC}^1(E;E)$ であって，(9)から $\|\lambda_c\|_1'\leqq d$ となる．ゆえに，λ_c は Lipschitz 写像であって，$\|\cdot\|'$ に関する λ_c の Lipschitz 定数 Lip$'(\lambda_c)$は，Lip$'(\lambda_c)\leqq d$ をみたす．

$\phi_c{}^{(\tilde{v})}=\phi_c{}^{(L)}+\lambda_c=\exp cL+\lambda_c$ だから，(5)と上に述べたことから，定理1によって，

(15)　$\phi_c{}^{(L)}(1+g)=(1+g)\phi_c{}^{(\tilde{v})}$

をみたす $g\in\mathcal{BC}^0(E;E)$が，ただ1つ存在する．そして，$h=1+g$ は E の同相写像となる．

ここで，$\phi_c{}^{(L)}=\exp cL$ は双曲型線型同相写像であるから，その不動点は原点0だけである．一方，$\phi_c{}^{(\tilde{v})}(0)=0$ は $\tilde{v}(0)=0$ からすぐわかるが，(15)式から $h=1+g$ は $\phi_c{}^{(\tilde{v})}$ の不動点全体の集合から $\phi_c{}^{(L)}$ の不動点全体の集合の間の同相写像をひき起こすことがわかり，したがって，$\phi_c{}^{(\tilde{v})}$ の不動点は0だけで，$h(0)=0$ となる．

各 $t\in I$ に対して

$$\begin{aligned}\phi_t{}^{(L)}h\phi_{-t}{}^{(\tilde{v})}&=(\exp tL)(1+g)(\exp(-tL)+\lambda_{-t})\\&=1+(\exp tL)(g(\exp(-tL)+\lambda_{-t})+\lambda_{-t})\end{aligned}$$

となる．g, λ_{-t} は C^0 有界(実は C^1 有界)で $\exp tL$ は連続線型写像だから，g'

$=(\exp tL)(g(\exp(-tL)+\lambda_{-t})+\lambda_{-t})$ は C^0 有界である．すなわち，

(16) 各 $t\in I$ に対して $\phi_t^{(L)}h\phi_{-t}^{(\tilde{v})}=1+g',\quad g'\in\mathcal{BC}^0(E;E)$

となる．

そこで，$-c\leqq t\leqq c$ とすると，(12), (15) から，

$$\phi_c^{(L)}(\phi_t^{(L)}h\phi_{-t}^{(\tilde{v})})=\phi_t^{(L)}\phi_c^{(L)}h\phi_{-t}^{(\tilde{v})}=\phi_t^{(L)}h\phi_c^{(\tilde{v})}\phi_{-t}^{(\tilde{v})}$$
$$=(\phi_t^{(L)}h\phi_{-t}^{(\tilde{v})})\phi_c^{(\tilde{v})}$$

が成立する．したがって，(16) と (15) の解の一意性から，$\phi_t^{(L)}h\phi_{-t}^{(\tilde{v})}=h$ となる．すなわち，

(17) $-c\leqq t\leqq c$ とすると $\phi_t^{(L)}h=h\phi_t^{(\tilde{v})}$

となる．

$\phi^{(\tilde{v})}|[-c,c]\times E:[-c,c]\times E\to E$ は連続(実は C^1 級)で，$\tilde{v}(0)=0$ だから，$\phi^{(\tilde{v})}([-c,c]\times\{0\})=0$ となる．そして，$[-c,c]$ はコンパクトだから，つぎの補題3から，適当な正数 γ があって，$\phi^{(\tilde{v})}([-c,c]\times E(\gamma))\subset E(\rho/2)$ とできる．

すると，(8) から $\|x\|\leqq\gamma$，$-c\leqq t\leqq c$ ならば $\phi^{(\tilde{v})}(t,x)=\phi^{(v)}(t,x)$ となる．したがって，(17) を書き直して定理を得る．▌

補題 3 X をコンパクト位相空間，E をノルム空間とする．いま，$\varphi: X\times E\to E$ を連続写像とし，$\varphi(X\times\{0\})=0$ とすると，任意の正数 α に対して，適当な正数 β があって，$\varphi(X\times E(\beta))\subset E(\alpha)$ とできる．

証明 α を正数とする．X の各点 x に対して，$\varphi(x,0)=0$ で，φ は連続だから，x の X における適当な開近傍 V_x，および正数 β_x が存在して，$\varphi(V_x\times E(\beta_x))\subset E(\alpha)$ となる．$\{V_x;\ x\in X\}$ は X の開被覆となるが，X はコンパクトだから，有限個の X の点 $x_1,\cdots,x_m$ があって，$V_{x_1}\cup\cdots\cup V_{x_m}=X$ となる．いま，$\beta=\min\{\beta_{x_1},\cdots,\beta_{x_m}\}$ とおくと，$\beta>0$ であって，$\varphi(V_{x_i}\times E(\beta))\subset\varphi(V_{x_i}\times E(\beta_{x_i}))\subset E(\alpha)$ となる．したがって，i に関する和集合をとって，補題の結論を得る．▌

定理4をさらに詳しくしらべることにする．そのため，いままでと同じ仮定と記号を用いることにする．

まず，定理4の証明の中にでてくる E の C^1 ベクトル場 $\tilde{v}$ は，E の1パラ

メーター変換群を生成することを証明しよう．

定理4の証明から，$\phi^{(\tilde{v})}: I\times E\to E$ は C^1 級で，(12), (13)が成立する．いま，実数 t を $t=nc+t'$ (n は整数，$0\leqq t'<c$) の形に表わす．すると，これは一意的である．そこで，$\tilde{\phi}_t=\phi_{t'}{}^{(\tilde{v})}(\phi_c{}^{(\tilde{v})})^n: E\to E$ とおき，$\tilde{\phi}: \boldsymbol{R}\times E\to E$ を，$\tilde{\phi}(t,x)=\tilde{\phi}_t(x)$，$(t,x)\in \boldsymbol{R}\times E$ と定義する．

すると(12), (13)から，$\tilde{\phi}$ は $\phi^{(\tilde{v})}$ の拡張であることがわかり，さらに，第7章§4定理1の証明と同様にして，$\tilde{\phi}$ が C^1 級であることもわかる．そして，$\tilde{\phi}_t$ の定義と(12), (13)から，$\tilde{\phi}$ が E の(C^1 級) 1パラメーター変換群となることは容易に証明できる．

また，$\tilde{\phi}^x: \boldsymbol{R}\to E$ を $\tilde{\phi}^x(t)=\tilde{\phi}(t,x)$，$t\in\boldsymbol{R}$，$x\in E$ と定義すると，これは x を初期条件とする $\tilde{v}$ の積分曲線となる．

以上で，$\tilde{\phi}$ は $\tilde{v}$ の生成する E の C^1 級1パラメーター変換群であることがわかった．これを，あらためて $\phi^{(\tilde{v})}: \boldsymbol{R}\times E\to E$ と書くことにする．すると，定理4の証明の(17)および $\phi^{(\tilde{v})}=\tilde{\phi}$ の定義から，つぎの(A)が成立する．

(A) $t\in\boldsymbol{R}$ に対して $\phi_t{}^{(L)}h = h\phi_t{}^{(\tilde{v})}$

V は原点0を含む E の開集合で，$v: V\to E$ は V 上の C^1 ベクトル場だから，$x\in V$ を初期条件とする v の積分曲線の最大存在区間 J_x が考えられる(第7章§4)．J_x は0を含む開区間で，J_x を定義域とする．x を初期条件にもつ v の積分曲線 $\phi^{(v)x}: J_x\to V$ が存在する．

いま，$D=\bigcup_{x\in V} J_x\times\{x\}\subset\boldsymbol{R}\times V\subset\boldsymbol{R}\times E$ とおく．そうして，$\phi^{(v)}: D\to V$ を $\phi^{(v)}(t,x)=\phi^{(v)x}(t)$，$(t,x)\in D$ によって定義する．すると，最大存在区間の定義と定理4の証明から，$I\times E(b)\subset D$ であって，これは定理4の証明の中の $\phi^{(v)}: I\times E(b)\to E(2b)$ の拡張であることがわかる．

さらに，$\|x\|\leqq\rho/2$ ならば $v(x)=\tilde{v}(x)$ であることから，$x\in E$，$t\in\boldsymbol{R}$ が与えられたとき，$0\leqq t'\leqq t$ (または $t\leqq t'\leqq 0$) となる任意の t' に対して，

$$\|\phi^{(\tilde{v})x}(t')\| = \|\phi^{(\tilde{v})}(t',x)\| \leqq \rho/2 \quad \text{ならば} \quad t\in J_x$$

であって，$\phi^{(\tilde{v})}(t',x)=\phi^{(v)}(t',x)$ が成立する．したがって，(A)と合わせて，つぎの補題が証明されたことになる．

補題 4 $x \in V$, $t \in \boldsymbol{R}$ とする．いま，$0 \leqq t' \leqq t$ (または $t \leqq t' \leqq 0$) となる任意の t' に対して $\|\phi^{(v)}(t', x)\| \leqq \rho/2$ ならば，$t \in J_x$ であって，$\phi^{(L)}(t', h(x)) = h\phi^{(v)}(t', x)$ が成立する．

これらの結果をまとめて，定理5を得るが，これを述べるための準備として，つぎの術語を用意しよう．

一般に C^1 ベクトル場 $v: V \to E$ に対して $v(x_0) = 0$ となる点 $x_0 \in V$ を v の**特異点**という．このとき $c: \boldsymbol{R} \to E$ を，$c(t) = x_0$, $t \in \boldsymbol{R}$ と定義すると，これは x_0 を初期条件とする v の積分曲線である．したがって，$J_{x_0} = \boldsymbol{R}$ であって，$\phi^{(v)}(t, x_0) = x_0$, $t \in \boldsymbol{R}$ となる．

$v(x_0) = 0$ であって，さらに，$Dv(x_0): E \to E$ のスペクトル $\sigma(Dv(x_0))$ が実数部分が零の複素数を含まないとき，すなわち，$\exp(Dv(x_0))$ が双曲型のとき，x_0 を v の**基本特異点**という．

定理 5 **(常微分方程式に関する Hartman の定理)** E を有限次元 Banach 空間，V を原点 0 を含む E の開集合，$v: V \to E$ を C^1 ベクトル場とする．

いま，0 が v の基本特異点とすると，適当な正数 δ と，原点を保つ E の適当な同相写像 $h: E \to E$ があって，$x \in V$, $t \in J_x$ に対して，$0 \leqq t' \leqq t$ (または $t \leqq t' \leqq 0$) となる任意の t' に対して $\|\phi^{(v)}(t', x)\| \leqq \delta$ ならば

$$\phi^{(L)}(t', h(x)) = h\phi^{(v)}(t', x)$$

が成立する．

この定理は補題4および，これまでの議論から明らかである．

注意 3 定理5において，$L = Dv(0): E \to E$ とし，双曲型線型同相写像 $\exp L: E \to E$ に関する E の直和分解を $E = E^s \oplus E^u$ とする．このとき，適当な正数 δ_0 があって，$x \in E(\delta_0) \cap h^{-1}(E^s)$ ならば，任意の $t \geqq 0$ に対して $t \in J_x$ であって，$\|\phi^{(v)}(t, x)\| \leqq \delta$ となり，さらに $\lim_{t \to \infty} \phi^{(v)}(t, x) = 0$ となる．

逆に，すべての $t \geqq 0$ に対して $\phi^{(v)}(t, x)$ が定義されて，$\lim_{t \to \infty} \phi^{(v)}(t, x) = 0$ となるなら，十分大きな正数 t_0 があって $t \geqq t_0$ なら $\phi^{(v)}(t, x) \in E(\delta_0) \cap h^{-1}(E^s)$ となる．後半は定理5からすぐわかる．前半は，(A)，補題4, §1 命題3の証明などから確かめることができるが，繁雑になるので省略する．

§3　安定多様体(I)

E_1, E_2 を Banach 空間，$L_1 : E_1 \to E_1$，$L_2 : E_2 \to E_2$ を線型同相写像とする．いま，$a = \max\{\|L_1\|, \|L_2^{-1}\|\} < 1$ とする．そして，$E = E_1 \times E_2$ とすると，$x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ のノルムは $\|x\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\}$ で与えられる．そして，$L : E \to E$ を $L(x_1, x_2) = (L_1(x_1), L_2(x_2)) \in E_1 \times E_2 = E$，$(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 = E$ によって定義すると，L は双曲型線型同相写像であって，その歪度は a となる．§1定理1から，一般に，双曲型線型同相写像はこのようにして構成される．

いま，Banach 空間 F と $b, (0 < b \leqq \infty)$ に対して，$F(b)$ を，原点を中心とする半径 b の F の閉球とする($b = \infty$ ならば $F(\infty) = F$)．すると，$E(b) = E_1(b) \times E_2(b)$ となる．

正数 d に対して，$\mathcal{BC}^0(E(b); E)$ の部分集合 $\mathcal{N}_d$ をつぎの条件(a)をみたす写像 $f : E(b) \to E$ 全体の集合とする．

(a)　f は Lipschitz 写像で $\mathrm{Lip}(f) \leqq d$，そして $b < \infty$ ならば $\|f\| \leqq bd$ である．

以上の仮定と記号のもとで，つぎの定理が成り立つ．

定理 1　$0 < d < 1 - a$ とすると，つぎのことが成立する．

(1)　$f \in \mathcal{N}_d$ ならば，$L + f : E(b) \to E$ は，ただ1つの不動点 p_0 をもつ．

(2)　$f \in \mathcal{N}_d$ に対して，つぎの性質(＊)をみたす写像 $h : E_1(b) \to E_2(b)$ が，ただ1つ存在する．

(＊)　$x \in E(b)$ に対して，$x \in \mathrm{graph}(h)$ となるための必要十分条件は，$(L+f)^n(x)$ がすべての $n \geqq 0$ に対して定義され有界となることである．

(3)　上の写像 h は Lipschitz 写像で，$p_0 \in \mathrm{graph}(h)$，$(L+f)(\mathrm{graph}(h)) \subset \mathrm{graph}(h)$ となる．

(4)　$0 < d < (1-a)/(1+a)$ ならば $(L+f)|\mathrm{graph}(h) : \mathrm{graph}(h) \to \mathrm{graph}(h)$ は縮小写像である．

証明　L は双曲型線型同相写像で，歪度が a だから，§2補題1によって，$1 - L : E \to E$ は線型同相写像であって，$\|(1-L)^{-1}\| \leqq (1-a)^{-1}$ となる．

$(L+f)(x)=x$ を書き直すと，$(1-L)^{-1}f(x)=x$ となる．仮定から，$b<\infty$ のときは，

$$\|(1-L)^{-1}f\| \leqq \|(1-L)^{-1}\|\|f\| \leqq (1-a)^{-1}bd \leqq b$$

となる．したがって，$(1-L)^{-1}f: E(b)\to E(b)$ がうまく定義された．そして，f は Lipschitz 写像だから $(1-L)^{-1}f$ も Lipschitz 写像で，仮定から，

$$\mathrm{Lip}\,((1-L)^{-1}f) \leqq \|(1-L)^{-1}\|\,\mathrm{Lip}\,(f) \leqq (1-a)^{-1}d < 1$$

となる．

ゆえに，$(1-L)^{-1}f$ は縮小写像であって，ただ1つの不動点 p_0 をもつ．すなわち，$L+f$ はただ1つの不動点 p_0 をもつ．以上で(1)が証明された．

いま，$f: E(b)=E_1(b)\times E_2(b)\to E=E_1\times E_2$ を，$f(x_1, x_2)=(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))\in E_1\times E_2$，$(x_1, x_2)\in E_1(b)\times E_2(b)$ と表わすことにする．

E の有界点列全体の作る Banach 空間を $\mathcal{B}(E)$ とし，$E(b)$ に含まれる有界点列全体の作る $\mathcal{B}(E)$ の部分集合を $\mathcal{B}(E(b))$ とすると，$\mathcal{B}(E(b))=\mathcal{B}(E)(b)$ となる．したがって，$\mathcal{B}(E(b))$ は $\mathcal{B}(E)$ の閉集合で，完備である(第6章§1を参照のこと)．

いま，$(x_1, \gamma)\in E_1(b)\times\mathcal{B}(E(b))$ に対して，E の点列 $T(x_1, \gamma)$ をつぎの式で定義しよう．

$$(5)\quad T(x_1, \gamma)(n)=\left(L_1{}^n(x_1)+\sum_{k=0}^{n-1}L_1{}^{n-1-k}f_1\gamma(k),\ -\sum_{k=n}^{\infty}L_2{}^{n-1-k}f_2\gamma(k)\right)$$

ここで，f は Lipschitz 写像で，γ が E の有界点列だから，$f\gamma$ も E の有界点列となる．したがって，$i=1, 2$ に対して，$f_i\gamma$ は E_i の有界点列で，$\|f_i\gamma\|\leqq\|f\gamma\|$ となる．

そして，$\|L_2{}^{-1}\|\leqq a<1$，$\|L_1\|\leqq a<1$ から

$$\begin{aligned}\|T(x_1, \gamma)(n)\| &\leqq \max\left\{a^n\|x_1\|+\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\|f\gamma\|,\ \sum_{k=n}^{\infty}a^{n-1-k}\|f\gamma\|\right\}\\ &\leqq \max\{a^n\|x_1\|+(1-a)^{-1}(1-a^n)\|f\gamma\|,\ (1-a)^{-1}\|f\gamma\|\}\end{aligned}$$

となる．したがって，$T(x_1, \gamma)$ は E の有界点列である．特に，$b<\infty$ ならば $\|x_1\|\leqq b$，$\|f\gamma\|\leqq\|f\|\leqq bd<(1-a)b$ であることに注意すると，上の不等式から $\|T(x_1, \gamma)(n)\|\leqq b$ となることがわかる．

以上から，写像 $T: E_1(b)\times\mathcal{B}(E(b))\to\mathcal{B}(E(b))$ が(5)によって定義されることがわかった．いま，$x_1\in E_1(b)$ に対して $T_{x_1}:\mathcal{B}(E(b))\to\mathcal{B}(E(b))$ を $T_{x_1}(\gamma)=T(x_1,\gamma)$，$\gamma\in\mathcal{B}(E(b))$ によって定義する．

いま，$x_1, x_1'\in E_1(b)$，$\gamma,\gamma'\in\mathcal{B}(E(b))$ とすると，簡単な計算によって，(5)式から，つぎの関係式が成立することがわかる．

$$(6)\quad \begin{cases} \|T_{x_1}(\gamma)-T_{x_1}(\gamma')\| \leqq (1-a)^{-1}\,\mathrm{Lip}\,(f)\|\gamma-\gamma'\| \leqq (1-a)^{-1}d\|\gamma-\gamma'\|, \\ \|T(x_1,\gamma)-T(x_1',\gamma)\| = \|x_1-x_1'\| \end{cases}$$

仮定から，$(1-a)^{-1}d<1$ となるから，T は第2成分に関して一様縮小となる．そして，$\mathcal{B}(E(b))$ は完備だから，T の不動点写像 $g: E_1(b)\to\mathcal{B}(E(b))$ が存在する．すなわち，

$$(7)\quad T(x_1, g(x_1)) = g(x_1),\qquad x_1\in E_1(b)$$

となる．

(6)式から T が Lipschitz 写像となることは容易に確かめられる．ゆえに，第6章§2定理2から，g も Lipschitz 写像となる．

(5), (7)から $n=0$ として，つぎの式を得る．

$$g(x_1)(0) = (x_1,\ -\sum_{k=0}^{\infty} L_2^{-1-k} f_2 g(x_1)(k))$$

この第2成分を $h(x_1)$ とおくと，つぎのことが成り立つ．

$$(8)\quad h(x_1) = p_2 g(x_1)(0) = -\sum_{k=0}^{\infty} L_2^{-1-k} f_2 g(x)(k),\quad x_1\in E_1(b)$$

であって，$g(x_1)(0)=(x_1, h(x_1))$，$x_1\in E(b)$ となる．ただし，$p_2: E=E_1\times E_2\to E_2$ は第2成分への射影である．

h は $E_1(b)$ から $E_2(b)$ への写像であるが，$\mathrm{ev}^0:\mathcal{B}(E)\to E$ を $\mathrm{ev}^0(\gamma)=\gamma(0)$，$\gamma\in\mathcal{B}(E)$ で定義される連続線型写像とすると，$h=p_2\,\mathrm{ev}^0\,g$ となる．g は Lipschitz 写像で，p_2 も連続線型だから，$h: E_1(b)\to E_2(b)$ も Lipschitz 写像となる．

いま，$x=(x_1,x_2)\in E_1(b)\times E_2(b)=E(b)$ とし，すべての $n\geqq 0$ に対して，$(L+f)^n(x)$ が定義され有界とする．$b<\infty$ のとき，これは，すべての $n\geqq 0$ に対して $\|(L+f)^n(x)\|\leqq b$ が成立するということと同値である．

そこで E の点列 γ を

(9) $\gamma(n)=(L+f)^n(x), \quad n\geqq 0$

と定義すると，$\gamma\in\mathcal{B}(E(b))$ となる．そして

(10)
$$\begin{aligned}\gamma(n)&=L(L+f)^{n-1}(x)+f\gamma(n-1)\\&=L^2(L+f)^{n-2}(x)+Lf\gamma(n-2)+f\gamma(n-1)\\&=\cdots\cdots\\&=L^n(x)+\sum_{k=0}^{n-1}L^{n-1-k}f\gamma(k)\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$\gamma(n)\in E(b)=E_1(b)\times E_2(b)$ の第2成分を $\gamma(n)_2$ とすると，

(11) $\gamma(n)_2=L_2{}^n\left(x_2+\sum_{k=0}^{n-1}L_2{}^{-1-k}f_2\gamma(k)\right)$

となる．これから，つぎの式が成立する．

(12) $\|x_2+\sum_{k=0}^{n-1}L_2{}^{-1-k}f_2\gamma(k)\|\leqq\|L_2{}^{-1}\|^n\|\gamma(n)_2\|$

γ は有界点列だから，$\|\gamma(n)_2\|$ は有界で，$\|L_2{}^{-1}\|\leqq a<1$ だから，(12) で $n\to\infty$ とすると，$x_2+\sum_{k=0}^{\infty}L_2{}^{-1-k}f_2\gamma(k)=0$，すなわち，$x_2=-\sum_{k=0}^{\infty}L_2{}^{-1-k}f_2\gamma(k)$ を得る．これを(11)に代入すると，つぎの式を得る．

(13) $\gamma(n)_2=-\sum_{k=n}^{\infty}L_2{}^{n-1-k}f_2\gamma(k)$

また，(10)から，$\gamma(n)$ の第1成分 $\gamma(n)_1$ はつぎの式で与えられる．

(14) $\gamma(n)_1=L_1{}^n(x_1)+\sum_{k=0}^{n-1}L_1{}^{n-1-k}f_1\gamma(k)$

(13), (14), (5)式から，$T(x_1,\gamma)(n)=\gamma(n)$，$n\geqq 0$ が成立することがわかる．そして，(7)の解の一意性から，$\gamma=g(x_1)$ となる．したがって，(9)式に $n=0$ を代入し，さらに(8)を用いると，$x=\gamma(0)=g(x_1)(0)=(x_1,h(x_1))\in\mathrm{graph}(h)$ となる．また，このような h は上に与えたものに限ることもわかった．

つぎに，$x=(x_1,x_2)\in\mathrm{graph}(h)$ とする．すると

(15) $g(x_1)(n)=(L+f)^n(x), \quad n\geqq 0$

となることを，n に関する帰納法で証明しよう．

$n=0$ とすると，$x\in\mathrm{graph}(h)$ から $x_2=h(x_1)$ となり，(8) から $g(x_1)(0)=(x_1,h(x_1))=(x_1,x_2)=x$ となる．ゆえに，(15)が成立する．

いま，$n-1\geqq 0$ で(15)が成立するものとすると，(7), (5)および帰納法の仮

定から

$$
\begin{aligned}
g(x_1)(n) &= T(x_1, g(x_1))(n) \\
&= \left(L_1{}^n(x_1) + \sum_{k=0}^{n-1} L_1{}^{n-1-k} f_1 g(x_1)(k),\ -\sum_{k=n}^{\infty} L_2{}^{n-1-k} f_2 g(x_1)(k)\right) \\
&= L(g(x_1)(n-1)) + (f_1 g(x_1)(n-1), f_2 g(x_1)(n-1)) \\
&= (L+f)(g(x_1)(n-1)) = (L+f)(L+f)^{n-1}(x) = (L+f)^n(x)
\end{aligned}
$$

となる．以上で(15)が証明された．

$g(x_1) \in \mathcal{B}(E(b))$だから，(15)によって，$(L+f)^n(x)$がすべての$n \geqq 0$に対して定義され有界となることがわかった．すなわち，(2)の証明が終った．

いま，p_0を$(L+f)$の不動点とすると，すべての$n \geqq 0$に対して，$(L+f)^n(p_0)$が定義されp_0と一致する．したがって，(2)から$p_0 \in \mathrm{graph}\,(h)$となる．また，$x \in \mathrm{graph}\,(h)$ならば，$(L+f)(x) \in \mathrm{graph}\,(h)$となることは，(2)から直ちにわかる．すなわち，$(L+f)(\mathrm{graph}\,(h)) \subset \mathrm{graph}\,(h)$である．$h$が Lipschitz 写像であることは，すでに証明したから，(3)の証明が終った．

いま，$x_1, x_1' \in E_1(b)$とすると，(6), (7)から

$$
\begin{aligned}
\|g(x_1) - g(x_1')\| &= \|T(x_1, g(x_1)) - T(x_1', g(x_1'))\| \\
&\leqq \|T(x_1, g(x_1)) - T(x_1, g(x_1'))\| \\
&\quad + \|T(x_1, g(x_1')) - T(x_1', g(x_1'))\| \\
&\leqq (1-a)^{-1} d \|g(x_1) - g(x_1')\| + \|x_1 - x_1'\|
\end{aligned}
$$

となる．そこで，$(1-a)^{-1}d<1$に注意すると，上式から

$$
(16) \qquad \|g(x_1) - g(x_1')\| \leqq \{1-(1-a)^{-1}d\}^{-1} \|x_1 - x_1'\|
$$

を得る．すると，(8), (16)から

$$
\begin{aligned}
(17) \qquad \|h(x_1) - h(x_1')\| &\leqq \sum_{k=0}^{\infty} \|L_2{}^{-1}\|^{1+k} \|f_2 g(x_1)(k) - f_2 g(x_1')(k)\| \\
&\leqq \sum_{k=0}^{\infty} a^{1+k} \mathrm{Lip}\,(f) \|g(x_1)(k) - g(x_1')(k)\| \\
&\leqq \sum_{k=0}^{\infty} a^{1+k} d \{1-(1-a)^{-1}d\}^{-1} \|x_1 - x_1'\| \\
&= ad(1-a-d)^{-1} \|x_1 - x_1'\|
\end{aligned}
$$

となる．

いま，$d<(1-a)/(1+a)$ とすると，$ad(1-a-d)^{-1}<1$ となり，(17)から，$\mathrm{Lip}(h)<1$ となる．したがって

$$\|h(x_1)-h(x_1')\| \leqq \|x_1-x_1'\|$$

となる．ゆえに，$x=(x_1, h(x_1))$，$x'=(x_1', h(x_1'))$，$x_1, x_1' \in E_1(b)$ とすると

$$\|x-x'\| = \max\{\|x_1-x_1'\|, \|h(x_1)-h(x_1')\|\} = \|x_1-x_1'\|$$

となる．すなわち，つぎのことが成立する．

(18)　$x, x' \in \mathrm{graph}\,(h)$　ならば　$\|x-x'\| = \|x_1-x_1'\|$

いま，$x, x' \in \mathrm{graph}\,(h)$ とすると，(3)から $(L+f)(x), (L+f)(x') \in \mathrm{graph}\,(h)$ となる．したがって，(18)から

$$\begin{aligned}\|(L+f)(x)-(L+f)(x')\| &= \|(L+f)(x)_1-(L+f)(x')_1\| \\ &= \|(L_1(x_1)+f_1(x))-(L_1(x_1')+f_1(x'))\| \\ &= \|L_1(x_1-x_1')+(f_1(x)-f_1(x'))\| \\ &\leqq \|L_1(x_1-x_1')\|+\|f_1(x)-f_1(x')\| \\ &\leqq \|L_1\|\|x_1-x_1'\|+\mathrm{Lip}(f)\|x-x'\| \leqq (a+d)\|x-x'\|\end{aligned}$$

となる．仮定から，$a+d<1$ である．したがって，$(L+f)|\mathrm{graph}\,(h)$ は縮小写像である．∎

$f \in \mathcal{N}_d$, $(0<d<1-a)$ に対して定理1によって定まる写像 $h: E_1(b) \to E_2(b)$ を，$L+f: E(b) \to E$ の**安定多様体関数**という．

つぎに，定理1をさらに詳しくした定理2を示すことにする．そのため，これまでと同じ仮定と記号を用いることにする．

また，r を正の整数，d を正数としたとき，$\mathcal{BC}^r(E(b); E)$ の部分集合 $\mathcal{N}_d^r$ を，つぎの性質(a)′ をみたす写像 $f: E(b) \to E$ 全体の集合とする．

(a)′　f は $\mathcal{N}_d$ に属し，C^r 有界かつ一様 C^r 級である．

定理 2　$0<d<1-a$ とすると，つぎのことが成立する．

(1)　$f \in \mathcal{N}_d$ に対して，つぎの性質(＊)をみたす写像 $h: E_1(b) \to E_2(b)$ がただ1つ存在する．そして，これは定理1の写像 h($L+f$ の安定多様体関数)と一致する．

(＊)　$x \in E(b)$ に対して，$x \in \mathrm{graph}\,(h)$ となるための必要十分条件は，すべ

ての $n\geqq 0$ に対して $(L+f)^n(x)$ が定義され，$\lim_{n\to\infty}(L+f)^n(x)=p_0$ となることである．

ここで，p_0 は $L+f$ の不動点とする．

(2) $r\geqq 1$ とし，$f\in\mathcal{N}_d{}^r$ が C^r 級ならば，$L+f$ の安定多様体関数 h は C^r 級である．また，$f\in\mathcal{N}_d$ が C^r 有界ならば，h も C^r 有界である．

(3) $b<\infty$ のとき，$f\in\mathcal{N}_d$ に対して $L+f$ の安定多様体関数 $h\in\mathcal{BC}^0(E_1(b);E_2(b))$ を対応させる写像 $\theta:\mathcal{N}_d\to\mathcal{BC}^0(E_1(b);E_2(b))$ は連続である．

(4) $b<\infty$，$r\geqq 1$ のとき，$f\in\mathcal{N}_d{}^r$ に対して $L+f$ の安定多様体関数 $h\in\mathcal{BC}^r(E_1(b);E_2(b))$ を対応させる写像 $\theta_r:\mathcal{N}_d{}^r\to\mathcal{BC}^r(E_1(b);E_2(b))$ は連続である．

証明 E の収束点列全体の作る Banach 空間を $\mathcal{S}(E)$ とする．すると，$\mathcal{S}(E)$ は $\mathcal{B}(E)$ の閉部分ベクトル空間である．$\mathcal{S}(E(b))$ を $E(b)$ に含まれる収束点列全体の集合とすると，$\mathcal{S}(E(b))=\mathcal{S}(E)(b)$ となる．したがって，これは完備となる(第6章§1の終りの部分を参照のこと)．

また，$\mathcal{S}(E)=\mathcal{S}(E_1)\times\mathcal{S}(E_2)$，$\mathcal{S}(E(b))=\mathcal{S}(E_1(b))\times\mathcal{S}(E_2(b))$ が成立する．

いま，定理1の写像 $T:E_1(b)\times\mathcal{B}(E(b))\to\mathcal{B}(E(b))$ に対して，$T(E_1(b)\times\mathcal{S}(E(b)))\subset\mathcal{S}(E(b))$ となることを証明しよう．

このため，T の定義式(定理1の証明の(5))をさらに詳しく検討しよう．

$\gamma\in\mathcal{S}(E_1)$ に対して，E_1 の点列 $\phi(\gamma)$ を

(5) $\phi(\gamma)(n)=\sum_{k=0}^{n-1}L_1{}^{n-1-k}\gamma(k)$

と定義する．いま，$m>n\geqq N$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\|\phi(\gamma)(m)-\phi(\gamma)(n)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{m-1}L_1{}^{m-1-k}\gamma(k)-\sum_{k=0}^{n-1}L_1{}^{n-1-k}\gamma(k)\right\| \\
&\leqq \left\|\sum_{k=0}^{N-m-n-1}L_1{}^{m-1-k}\gamma(k)\right\|+\left\|\sum_{k=0}^{N-1}L_1{}^{n-1-k}\gamma(k)\right\| \\
&\quad +\left\|\sum_{k=N}^{n-1}L_1{}^{n-1-k}(\gamma(k+m-n)-\gamma(k))\right\| \\
&\leqq 2a^{n-N}(1-a)^{-1}\|\gamma\| \\
&\quad +(1-a)^{-1}\sup\{\|\gamma(i)-\gamma(j)\|;\ i,j\geqq N\}
\end{aligned}
$$

となる．γ は収束点列だから基本列である．したがって，上の不等式から，$\phi(\gamma)$ も E_1 の基本列となる．E_1 は完備だから $\phi(\gamma)$ は収束する．

以上で，$\phi: \mathscr{S}(E_1)\to\mathscr{S}(E_1)$ が(5)式によって定義されることがわかった．そして，(5)から ϕ が連続線型写像であって，$\|\phi\|\leqq(1-a)^{-1}$ となることもわかる．

$\gamma\in\mathscr{S}(E_2)$ に対して E_2 の点列 $\psi(\gamma)$ を

(6)　$\psi(\gamma)(n)=\sum_{k=n}^{\infty}L_2{}^{n-1-k}\gamma(k)$

と定義する．すると，$m>n$ として

$$\|\psi(\gamma)(m)-\psi(\gamma)(n)\|\leqq a(1-a)^{-1}\sup\{\|\gamma(i)-\gamma(j)\|;\ i,j\geqq n\}$$

が成立する．γ は収束点列だから基本列である．したがって，上の不等式から，$\psi(\gamma)$ も E_2 の基本列となり，$\psi(\gamma)\in\mathscr{S}(E_2)$ がわかる．

以上で，$\psi: \mathscr{S}(E_2)\to\mathscr{S}(E_2)$ が(6)によって定義された．さらに，(6)から ψ は連続線型写像で，$\|\psi\|\leqq a(1-a)^{-1}$ となることがわかる．

$x_1\in E_1$ に対して，$\lim_{n\to\infty}L_1{}^n(x_1)=0$ となるから，点列 $\{L_1{}^n(x_1)\}$ は $\mathscr{S}(E_1)$ の元である．そこで $\tau: E_1\to\mathscr{S}(E_1)$ を $\tau(x_1)=\{L_1{}^n(x_1)\}$ と定義すると，τ は連続線型写像で $\|\tau\|=1$ となる．

いま $\gamma\in\mathscr{S}(E)$ とすると，f は Lipschitz 写像だから，$f_1\gamma=f_{1*}(\gamma)\in\mathscr{S}(E_1)$，$f_2\gamma=f_{2*}(\gamma)\in\mathscr{S}(E_2)$ となる．ここで $f_{i*}: \mathscr{S}(E)\to\mathscr{S}(E_i)$，$i=1,2$ は，第6章§1定理3から，連続である．

$(x_1,\gamma)\in E_1(b)\times\mathscr{S}(E(b))$ に対して，T の定義式を書き直すと，つぎのようになる．

(7)　$T(x_1,\gamma)=(\tau(x_1)+\phi f_{1*}(\gamma),\ -\psi f_{2*}(\gamma))$

これから，$T(x_1,\gamma)\in\mathscr{S}(E)$ がわかる．また，$T(E_1(b)\times\mathscr{B}(E(b)))\subset\mathscr{B}(E(b))$ となることから，$T(x_1,\gamma)\in\mathscr{S}(E(b))$ となる．以上で，$T(E_1(b)\times\mathscr{S}(E(b)))\subset\mathscr{S}(E(b))$ となることがわかった．そこで，$T_1=T|E_1(b)\times\mathscr{S}(E(b)): E_1(b)\times\mathscr{S}(E(b))\to\mathscr{S}(E(b))$ とおくと，T_1 は第2成分に関して一様縮小である．$\mathscr{S}(E(b))$ は完備だから，T_1 の不動点写像 $g_1: E_1(b)\to\mathscr{S}(E(b))$ が存在する．すなわち，$x_1\in E_1(b)$ として

$$T(x_1, g_1(x_1)) = T_1(x_1, g_1(x_1)) = g_1(x_1)$$

となる．T の不動点写像の一意性から $g=g_1$ となる．

定理1(2)の証明と全く同様にして，$f \in \mathcal{N}_d$ に対し，つぎの性質 $(*)_1$ をみたす写像 $h_1 : E_1(b) \to E_2(b)$ が，ただ1つ存在することがわかる．

$(*)_1$ $x \in E(b)$ に対して，$x \in \mathrm{graph}\,(h_1)$ となるための必要十分条件は，すべての $n \geqq 0$ に対して $(L+f)^n(x)$ が定義され，$\{(L+f)^n(x)\}$ が収束することである．

そして，$g=g_1$ から，$h=h_1$ がわかる．

また，$\lim_{n\to\infty}(L+f)^n(x)=q$ とすると，q は $L+f$ の不動点となる．したがって，定理1(1)から，$q=p_0$ となる．

以上で，(1)が証明された．

つぎに，$f \in \mathcal{N}_d$ が C^r 級とする $(r \geqq 1)$．すると，第6章§1定理3から，f_{i*} は C^r 級となる．したがって，(7)から，$T_1 = T|E_1(b) \times \mathcal{S}(E(b))$ は C^r 級となる．ゆえに，第6章§2定理2から，その不動点写像 $g=g_1$ は C^r 級となる．

いま，$\mathrm{ev}^0 : \mathcal{S}(E) \to E$ を $\mathrm{ev}^0(\gamma)=\gamma(0)$ で定義される連続線型写像とし，$p_2 : E=E_1 \times E_2 \to E_2$ を第2成分への射影とする．すると，$h=p_2\,\mathrm{ev}^0\,g_1$ から，h は C^r 級である．

また，$r \geqq 0$, $f \in \mathcal{N}_d$ とし，f が C^r 有界とする．すると，第6章§1定理3から，f_{i*} も C^r 有界となる．さらに，$b<\infty$ なら，(7)から T_1 も C^r 有界となる．したがって，第6章§2定理2によって，g_1 は C^r 有界となる．ゆえに，$h=p_2\,\mathrm{ev}^0\,g_1$ も C^r 有界である．すなわち，(2)が証明された．

つぎに，$b<\infty$ として(3)を証明しよう．いま，$T' : \mathcal{N}_d \times E_1(b) \times \mathcal{S}(E(b)) \to \mathcal{S}(E(b))$ を，$(f, x_1, \gamma) \in \mathcal{N}_d \times E_1(b) \times \mathcal{S}(E(b))$ に対して

(8) $T'(f, x_1, \gamma) = (\tau(x_1) + \phi f_{1*}(\gamma), -\psi f_{2*}(\gamma))$

として定義しよう((7)と同じ式である)．そして，$f \in \mathcal{N}_d$ に対して，$T_f' : E_1(b) \times \mathcal{S}(E(b)) \to \mathcal{S}(E(b))$ を $T_f'(x_1, \gamma) = T'(f, x_1, \gamma)$, $(x_1, \gamma) \in E_1(b) \times \mathcal{S}(E(b))$ と定義する．

定理1の証明の(6)から，T_f' は第2成分に関して一様縮小で，その一様縮

小定数は$(1-a)^{-1}d<1$でおさえられることがわかる．そして，$b<\infty$だから，T_f'はC^0有界である．

いま，$\sigma:\mathcal{BC}^0(E(b);E)\to\mathcal{BC}^0(\mathcal{S}(E(b));\mathcal{S}(E))=\mathcal{BC}^0(\mathcal{S}(E(b));\mathcal{S}(E_1))\times\mathcal{BC}^0(\mathcal{S}(E(b));\mathcal{S}(E_2))$を$\sigma(f)=f_*=(f_{1*},f_{2*})$，$f\in\mathcal{BC}^0(E(b);E)$と定義すると，第6章§1命題8から，$\sigma$はうまく定義できて，連続線型写像となる．そして，$f,f'\in\mathcal{N}_d$に対して，$(x_1,\gamma)\in E_1(b)\times\mathcal{S}(E(b))$として，(8)から

$$\begin{aligned}\|T_f'(x_1,\gamma)-T_{f'}'(x_1,\gamma)\| &= \|(\phi f_{1*}(\gamma)-\phi f_{1*}'(\gamma),\ -\psi f_{2*}\gamma+\psi f_{2*}'(\gamma))\|\\ &\leqq \max\{\|\phi\|\,\|(f_1-f_1')_*(\gamma)\|,\ \|\psi\|\,\|(f_2-f_2')_*(\gamma)\|\}\\ &\leqq \max\{\|\phi\|,\|\psi\|\}\|\sigma\|\,\|f-f'\|\,\|\gamma\|\\ &\leqq \max\{\|\phi\|,\|\psi\|\}\|\sigma\|\,b\,\|f-f'\|\end{aligned}$$

となる．したがって，$f\in\mathcal{N}_d$に対して$T_f'\in\mathcal{BC}^0(E_1(b)\times\mathcal{S}(E(b));\mathcal{S}(E(b)))$を対応させる写像は連続となる．ゆえに，第6章§2定理3から，$f\in\mathcal{N}_d$に対してT_f'の不動点写像$g_f\in\mathcal{BC}^0(E_1(b);\mathcal{S}(E(b)))$を対応させる写像は連続となる．したがって，$f\in\mathcal{N}_d$に対して$L+f$の安定多様体関数$h_f=p_2\,\mathrm{ev}^0\,g_f=(p_2\mathrm{ev}^0)_*g_f\in\mathcal{BC}^0(E_1(b);E_2(b))$を対応させる写像$\theta$も連続となる．

以上で(3)が証明された．そして，(4)の証明は，$f\in\mathcal{N}_d{}^r$ならばf_*が一様C^r級となり(第6章§1定理3)，したがって，(8)からT_f'が一様C^r級となることに注意すると，(3)の証明と全く同様にできる．▌

命題 1 いままでと同じ仮定と記号を用いることにする．いま，$0<d<1-a$で，$f\in\mathcal{N}_d$がC^r級とする$(r\geqq1)$．すると，定理2から，$L+f$の安定多様体関数$h:E_1(b)\to E_2(b)$はC^r級となるが，$f(0)=0$，$Df(0)=0$とすると，$h(0)=0$，$Dh(0)=0$となる．

すなわち，graph(h)は原点0でE_1に接する．

証明 $f(0)=0$と定理2の証明の(7)から，$T_1(0,0)=0$となる．T_1の不動点写像の一意性から，$g_1(0)=0$となる．したがって，$h(0)=p_2\,\mathrm{ev}^0\,g_1(0)=0$となる．

(7)から，$x_1\in E(b)$に対して，つぎの式が成立する．

$$g_1(x_1)=T_1(x_1,g_1(x_1))=(\tau(x_1)+\phi f_{1*}(g_1(x_1)),\ -\psi f_{2*}(g_1(x_1)))$$

これを $x_1=0$ で微分しよう．τ, ϕ, ψ は連続線型写像で，$g_1(0)=0$ となることから，第6章§1命題7および鎖法則によって，$Dg_1(0): E_1 \to \mathcal{S}(E) = \mathcal{S}(E_1) \times \mathcal{S}(E_2)$ はつぎの式で与えられる．

$$Dg_1(0)(y_1) = (\tau(y_1) + \phi(Df_1(0))_*(Dg_1(0)(y_1)), -\psi(Df_2(0))_*(Dg_1(0)(y_1))), \quad y_1 \in E_1$$

仮定から，$Df(0)=0$，したがって，$Df_1(0)=Df_2(0)=0$ となる．ゆえに，上式は

$$Dg_1(0)(y_1) = (\tau(y_1), 0), \qquad y_1 \in E_1$$

となる．$h = p_2 \mathrm{ev}^0 g_1$ で，$p_2 \mathrm{ev}^0$ は連続線型写像だから，$Dh(0) = p_2 \mathrm{ev}^0 Dg_1(0)$ となる．

いま，$y_1 \in E_1$ とすると

$$Dh(0)(y_1) = p_2 \mathrm{ev}^0 Dg_1(0)(y_1) = p_2(y_1, 0) = 0$$

となる．すなわち，$Dh(0)=0$ である．∎

M を C^r 多様体，$f: M \to M$ を C^r 微分同相写像とする$(r \geqq 1)$．点 $p \in M$ を f の不動点，すなわち $f(p)=p$，とすると，f の点 p における微分 $T_p f: T_p(M) \to T_p(M)$ は線型同相写像となる．いま，$T_p f$ が双曲型のとき，点 p を f の**双曲型不動点**という．以下 p は f の双曲型不動点と仮定する．

(U, α) を p を含む M の C^r 座標近傍，E を α に対する Banach 空間とする．$\alpha: U \to E$ を適当にとると，$\alpha(p)=0$ と仮定してよい．$f(p)=p$ だから，p の適当な開近傍 V をとって $f(V) \subset U$ とできる．そして，必要なら V をさらに小さくとって，$V \subset U$ をみたすようにする．

いま，$f_\alpha = \alpha f \alpha^{-1}: \alpha(V) \to \alpha(U) \subset E$ とおくと，f_α は C^r 写像で，$f_\alpha(0)=0$ となる．そして，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_p^{(\alpha)}} & T_p(M) \\ {\scriptstyle L = Df_\alpha(0)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle T_p f} \\ E & \xrightarrow{\varphi_p^{(\alpha)}} & T_p(M) \end{array}$$

ここで，$\varphi_p^{(\alpha)}$ は第7章§1で定義した線型同相写像である．したがって，仮

定から，$L=Df_\alpha(0)$ も双曲型線型同相写像となり，§1 定理 1 による E の L 不変な位相直和分解 $E=E^s\oplus E^u$ は，線型同相写像 $\varphi_p^{(\alpha)}$ によって，$T_p(M)$ の T_pf 不変な位相直和分解 $T_p(M)=E_p^s\oplus E_p^u$ に対応する．以下簡単のため，$\varphi_p^{(\alpha)}$ によって，E と $T_p(M)$，E^s と E_p^s，E^u と E_p^u を同一視することもある．

いま，$L=Df_\alpha(0)$ の歪度を a, $(0<a<1)$ とする．そして，正数 d を $0<d<(1-a)/(1+a)$ をみたすものとする．そして，$f_\alpha:\alpha(V)\to E$ を $f_\alpha=L+(f_\alpha-L)$ と表わすと，$(f_\alpha-L)(0)=f_\alpha(0)=0$，$D(f_\alpha-L)(0)=Df_\alpha(0)-L=0$ となる．$D(f_\alpha-L)$ は連続だから，十分小さな正数 b をとると，$E(2b)\subset\alpha(V)$ となり，$x\in E(b)$ ならば $\|D(f_\alpha-L)(x)\|\leqq d$ が成り立つようにできる．すると $(f_\alpha-L)|E(b)$ は Lipschitz 写像で，$\mathrm{Lip}\,((f_\alpha-L)|E(b))\leqq d$ となる．

そこで，$f_\alpha=L+(f_\alpha-L)$ を $E(b)$ に制限したものに定理 1, 2 命題 1 を適用して，その安定多様体関数 $h_\alpha:E^s(b)\to E^u(b)$ を得る．これは C^r 級で，つぎの条件をみたす．

(＊)　$h_\alpha(0)=0,\qquad Dh_\alpha(0)=0,\qquad \mathrm{Lip}\,(h_\alpha)<1$

いま，$\mathrm{Int}\,E^s(b)=\{x\in E^s;\ \|x\|<b\}$ とし，$W^s=\mathrm{graph}\,(h_\alpha|\mathrm{Int}\,E^s(b))$ と定義すると，第 7 章 §2 例 2 と同様にして，W^s は $E=E^s\oplus E^u=E^s\times E^u$ の部分多様体となることがわかる．さらに，(＊)から $W^s\ni 0$ であって，0 における W^s の接ベクトル空間は E^s と自然に同一視できることがわかる．

また，定理 1, 2 から，$x\in\mathrm{Int}\,E(b)$ に対して，つぎの 3 つの条件が同値となることがわかる．

(α)　$x\in W^s$,

(β)　すべての $n\geqq 0$ に対して $f_\alpha^n(x)\in\mathrm{Int}\,E(b)$,

(γ)　すべての $n\geqq 0$ に対して $f_\alpha^n(x)\in\mathrm{Int}\,E(b)$ であって，$\lim_{n\to\infty}f_\alpha^n(x)=0$.

また，さらに，$f_\alpha(W^s)\subset W^s$ (実は $f_\alpha(\mathrm{graph}\,(h_\alpha))\subset\mathrm{graph}\,(h_\alpha)$) であって，$f_\alpha|W^s:W^s\to W^s$ は縮小写像となる．

いま，M の部分集合 $W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ を $W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)=\alpha^{-1}(W^s)$ と定義して，$W=\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\,E(b))$ とおくと，つぎの命題が成立することが容易に確かめられる．

命題 2　W は $p \in M$ の開近傍で，$W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ は W に含まれる M の部分多様体である．そして，つぎの3つのことが成立する．

(1)　$p \in W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ であって，点 p における $W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ の接ベクトル空間は $E_p{}^s \subset T_p(M)$ と一致する．

(2)　$x \in W$ に対して，つぎの3つの条件は同値である．

(イ)　$x \in W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$,

(ロ)　すべての $n \geqq 0$ に対して $f^n(x) \in W$,

(ハ)　すべての $n \geqq 0$ に対して $f^n(x) \in W$ であって，$\lim_{n \to \infty} f^n(x) = p$.

(3)　$f(W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)) \subset W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ であって，つぎの図は可換である．

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathrm{loc}}{}^s(p) & \xrightarrow{\alpha} & W^s \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} \\ W_{\mathrm{loc}}{}^s(p) & \xrightarrow{\alpha} & W^s \end{array}$$

ここで，$f_\alpha | W^s : W^s \to W^s$ は縮小写像であって，α は C^r 微分同相写像である．

上の $W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ を f の点 p における**局所安定多様体**という．そして，$W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W_{\mathrm{loc}}{}^s(p))$ を f の点 p における**安定多様体**という．これは M の部分集合であるが，M がコンパクト C^r 多様体のとき，$W^s(p)$ の構造をもう少し詳しくしらべることにする．

定理 3　M がコンパクト C^r 多様体，$f: M \to M$ を C^r 微分同相写像とする $(r \geqq 1)$．いま点 $p \in M$ が f の双曲型不動点とし，双曲型線型同相写像 $T_pf: T_p(M) \to T_p(M)$ に関する $T_p(M)$ の T_pf 不変な(位相)直和分解を $T_p(M) = E_p{}^s \oplus E_p{}^u$ とする．そして，$W^s(p)$ を f の p における安定多様体とすると，つぎのことが成立する．

(1)　適当な C^r 級はめこみ $\phi_s : E_p{}^s \to M$ が存在して，$\phi_s(E_p{}^s) = W^s(p)$ となる．さらに，ϕ_s は単射で $\phi_s(0) = p$ とできる．

(2)　$f(W^s(p)) = W^s(p)$ であって，適当な C^r 微分同相写像 $\tilde{g} : E_p{}^s \to E_p{}^s$ が存在して，つぎの図は可換となる．

$$\begin{array}{ccc} E_p{}^s & \xrightarrow{\phi_s} & W^s(p) \\ \tilde{g}\downarrow & & \downarrow f \\ E_p{}^s & \xrightarrow{\phi_s} & W^s(p) \end{array}$$

そして，さらに $\tilde{g}$ は縮小写像にとれる．

(3)　$T_0\phi_s: T_0(E_p{}^s)=E_p{}^s\to T_p(M)$ は包含写像である．

(4)　M の点 x に対して $x\in W^s(p)$ となるための必要十分条件は $\lim_{n\to\infty} f^n(x)=p$ となることである．

また，点 p の適当な近傍 U があって，M の点 x が $W^s(p)$ に属するための必要十分条件は，十分大きな $N\geqq 0$ が存在して，$n\geqq N$ となるすべての n に対して $f^n(x)\in U$ となることである．

証明　(4)は $W^s(p)$ の定義と命題2から明らかである．

いま，$p_1: E=E^s\oplus E^u=E^s\times E^u\to E^s$ を第1成分への射影として，写像 g: $\mathrm{Int}\,E^s(b)\to E^s$ をつぎの式で定義する．

(5)　$g(x)=p_1 f_\alpha(x, h_\alpha(x)),\quad \|x\|<b$

命題2から g は縮小写像である．そして，$h_\alpha(0)=0$，$f_\alpha(0)=0$ となるから，$g(0)=0$ となる．また，$L=Df_\alpha(0)$，$L_s=L|E^s: E^s\to E^s$ とすると，$Dh_\alpha(0)=0$ であるから，

$$Dg(0)=p_1(D_1f_\alpha(0)+D_2f_\alpha(0)Dh_\alpha(0))=p_1D_1f_\alpha(0)=L_s$$

となる．

したがって，$k=g-L_s: \mathrm{Int}\,E^s(b)\to E^s$，すなわち $g=L_s+k$，と定義すると，$k(0)=g(0)=0$，$Dk(0)=Dg(0)-L_s=0$ となる．そして，$Dk=Dg-L_s$ は連続だから，$\|x\|$ を十分小さくとると，$\|Dk(x)\|$ はいくらでも小さくできる．

M はコンパクトだから有限次元，したがって，E^s も有限次元となる．すなわち，$E^s=\boldsymbol{R}^m$ としてよい．すると．E^s のノルム $\|\cdot\|$ は $\boldsymbol{R}^m$ の標準的なノルムと同値となる．したがって，§2補題2を用いて，任意の正数 ε に対して，適当な正数 ρ, $(\rho\leqq b)$，および適当な C^r 写像 $\tilde{k}: E^s\to E^s$ があって，つぎの条件(6), (7)をみたすことがわかる．

(6)　$\tilde{k}(x)=\begin{cases} k(x), & \|x\| \leqq \rho/2, \\ 0, & \|x\| \geqq b \end{cases}$

(7)　任意の $x \in E^s$ に対して $\|\tilde{k}(x)\|_1 \leqq \varepsilon$.

(7)式から $\tilde{k}$ は Lipschitz 写像で，$\mathrm{Lip}(\tilde{k}) \leqq \varepsilon$ となる．また(6)と $E(b)$ がコンパクトとなることから，$\tilde{k}$ は C^r 有界かつ一様 C^r 級となる．

いま，$\varepsilon < \|L_s^{-1}\|^{-1}$ とすると，以上のことから，$\tilde{g}=L_s+\tilde{k}: E^s \to E^s$ に第6章§3定理1が適用できて，$\tilde{g}$ は C^r 微分同相写像となる．また，$\tilde{g}$ は Lipschitz 写像であって，$\mathrm{Lip}(\tilde{g}) \leqq \|L_s\| + \mathrm{Lip}(\tilde{k}) \leqq a+\varepsilon$ となるから，$\varepsilon < 1-a$ とすれば，$\mathrm{Lip}(\tilde{g}) < 1$ となる．

以上をまとめて，つぎの(8)が証明されたことになる．

(8)　適当な正数 ρ, $(\rho \leqq b)$，および適当な C^r 微分同相写像 $\tilde{g}: E^s \to E^s$ があって，$\|x\| \leqq \rho/2$ ならば $\tilde{g}(x)=g(x)$ となる．また $\tilde{g}$ は縮小写像で，$\tilde{g}(0)=g(0)=0$ となる．

以上から，縮小写像の定理により，任意の $x \in E^s$ に対して $\lim_{n\to\infty} \tilde{g}^n(x)=0$ となる．したがって，適当な整数 $N(x) \geqq 0$ があって，$n \geqq N(x)$ なら $\|\tilde{g}^n(x)\| \leqq \rho/2$ となる．

いま，$\phi: \mathrm{Int}\, E^s(b) \to W_{\mathrm{loc}}{}^s(p) \subset M$ をつぎの式で定義する．

(9)　$\phi(x)=\alpha^{-1}(x, h_\alpha(x)), \quad \|x\| < b$

すると，$\phi(0)=p$ であって，ϕ は $\mathrm{Int}\, E^s(b)$ から $W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ の上への C^r 微分同相写像である．したがって，$\phi: \mathrm{Int}\, E^s(b) \to M$ は C^r 級のうめこみである．

そこで，$\phi_s: E^s \to M$ をつぎのように定義しよう．

(10)　$\phi_s(x)=f^{-n}\phi\tilde{g}^n(x), \quad n \geqq N(x)$

もしこれがうまく定義できるなら，$f, \tilde{g}$ は C^r 微分同相写像で，ϕ は C^r 級うめこみ，特に，C^r 級はめこみと考えてよいことから，$\phi_s: E^s \to M$ は C^r 級はめこみとなる．また，$\tilde{g}(0)=0$, $\phi(0)=p$, $f(p)=p$ となることから，$\phi_s(0)=p$ となる．

さらに，任意の $x, x' \in E^s$ に対して，$n \geqq \max\{N(x), N(x')\}$ とすると，(10)から，$\phi_s(x)=f^{-n}\phi\tilde{g}^n(x)$，$\phi_s(x')=f^{-n}\phi\tilde{g}^n(x')$ となる．そして，$\tilde{g}$, ϕ, f^{-1} が

単射であることから，$x \neq x'$ なら，$\phi_s(x) \neq \phi_s(x')$ となることがわかる．すなわち，ϕ_s は単射である．

(10)式によって写像 $\phi_s : E^s \to M$ がうまく定義できることをいうために，つぎの式を証明しよう．

(11)　$\|x\| \leqq \rho/2$　ならば　$\phi\tilde{g}(x) = \phi g(x) = f\phi(x)$

いま，$\|x\| \leqq \rho/2$ とすると，(8)から $\tilde{g}(x) = g(x)$ となる．$\tilde{g}(0) = g(0) = 0$ で，$\tilde{g}$ が縮小写像だから，$\|\tilde{g}(x)\| = \|g(x)\| \leqq \rho/2 < b$ となる．したがって，$\phi\tilde{g}(x) = \phi g(x)$ は定義できる．そして，(9)から $\phi\tilde{g}(x) = \phi g(x) = \alpha^{-1}(g(x), h_\alpha g(x))$ となる．また，$f\phi(x) = f\alpha^{-1}(x, h_\alpha(x)) = \alpha^{-1}(\alpha f \alpha^{-1})(x, h_\alpha(x)) = \alpha^{-1} f_\alpha(x, h_\alpha(x))$ であるから，(11)を証明するためには，

(12)　$(g(x), h_\alpha g(x)) = f_\alpha(x, h_\alpha(x)),\quad \|x\| \leqq \rho/2$

を示せば十分である．

h_α は f_α の安定多様体関数だから，$f_\alpha(\mathrm{graph}\,(h_\alpha)) \subset \mathrm{graph}\,(h_\alpha)$ となる．したがって，$f_\alpha(x, h_\alpha(x)) = (y, h_\alpha(y))$ の形に表わせる．また，この式から，$y = p_1 f(x, h_\alpha(x)) = g(x)$ となる．これを上の式に代入すれば(12)式となる．

以上で，(11)が証明できた．そこで，いま，$x \in E^s$ とし，$n \geqq N(x)$ とすると，$\|\tilde{g}^n(x)\| \leqq \rho/2$ となるから，(11)によって

$$f^{-(n+1)}\phi\tilde{g}^{n+1}(x) = f^{-n}f^{-1}\phi\tilde{g}(\tilde{g}^n(x)) = f^{-n}\phi\tilde{g}^n(x)$$

となる．すなわち，(10)によって $\phi_s : E^s \to M$ がうまく定義できた．

以上で，(1)の証明が終った．つぎに(2)を証明しよう．

ϕ_s の定義式(10)と $W^s(p) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(W_{\mathrm{loc}}{}^s(p))$ から，$\phi_s(E^s) \subset W^s(p)$ は明らかである．いま，$y \in W^s(p)$ とすると，十分大きな $n_0 \geqq 0$ があって $f^{n_0}(y) \in W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ となる．したがって，命題2から，すべての $n \geqq 0$ に対して $f^{n+n_0}(y) \in W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ であって，$\lim_{n\to\infty} f^{n+n_0}(y) = p$ となる．

一方，$\phi : \mathrm{Int}\,E^s(b) \to W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$ は C^r 微分同相写像で，$\phi(0) = p$ であるから，十分大きな $n_1 \geqq 0$ をとると，適当な点 $x_0 \in E(\rho/2)$ が存在して，$f^{n_0+n_1}(y) = \phi(x_0)$ が成立する．いま，$x = \tilde{g}^{-(n_0+n_1)}(x_0)$ とおくと，$\phi_s(x) = y$ となることは容易に確かめられる．

以上で，$\phi_s(E^s)=W^s(p)$ となることがわかった．さらに，$x\in E^s$ に対して，n を十分大きくとると，(10)から

$$f\phi_s(x)=ff^{-n}\phi\tilde{g}^n(x)=f^{-(n-1)}\phi\tilde{g}^{(n-1)}\tilde{g}(x)=\phi_s\tilde{g}(x)$$

がわかる．すなわち，$f\phi_s=\phi_s\tilde{g}$ である．

以上で，(2)の証明が終った．最後に，(3)を証明しよう．

(10)から，$\|x\|\leqq\rho/2$ ならば $\phi_s(x)=\phi(x)$ となる．すると(9)および $Dh_\alpha(0)=0$ となることから，$T_0\phi_s=T_0\phi:E^s\to T_p(M)$ は，$E^s=E_p{}^s$ から $E_p{}^s$ への恒等写像となることがわかる．▌

M をコンパクト多様体，$f:M\to M$ を C^r 微分同相写像とする($r\geqq1$)．いま点 $p\in M$ が f の双曲型不動点とし，$T_pf:T_p(M)\to T_p(M)$ に関する $T_p(M)$ の直和分解を $T_p(M)=E_p{}^s(f)\oplus E_p{}^u(f)$ とする．

f の逆写像 $f^{-1}:M\to M$ は C^r 微分同相写像で，p は f^{-1} の不動点でもある．そして，$T_pf^{-1}=(T_pf)^{-1}$ となるから，§1 定理1によって，$T_pf^{-1}:T_p(M)\to T_p(M)$ も双曲型となり，$E_p{}^s(f^{-1})=E_p{}^u(f)$，$E_p{}^u(f^{-1})=E_p{}^s(f)$ とおくと，$T_p(M)=E_p{}^s(f^{-1})\oplus E_p{}^u(f^{-1})$ となる．これが T_pf^{-1} に関する $T_p(M)$ の位相直和分解となる．

そこで，$f^{-1}:M\to M$ の点 $p\in M$ における(局所)安定多様体を，f の点 p における**(局所)不安定多様体**といい，$W^u(p)$($W_{\mathrm{loc}}{}^u(p)$)で表わすことにする．すると，定理3を f^{-1} に適用して，つぎの定理3′を得る．

定理 3′ M をコンパクト C^r 多様体，$f:M\to M$ を C^r 微分同相写像とする($r\geqq1$)．いま，点 $p\in M$ を f の双曲型不動点とし，T_pf に関する $T_p(M)$ の直和分解を $T_p(M)=E_p{}^s\oplus E_p{}^u$ とする．そして，$W^u(p)$ を f の p における不安定多様体とすると，つぎのことが成立する．

(1) 適当な C^r 級はめこみ $\phi_u:E_p{}^u\to M$ があって，$\phi_u(E_p{}^u)=W^u(p)$ となる．そして，ϕ_u は単射で $\phi_u(0)=p$ である．

(2) $f(W^u(p))=W^u(p)$ であって，適当な C^r 微分同相写像 $\tilde{g}_1:E_p{}^u\to E_p{}^u$ があって，つぎの図は可換となる．

$$\begin{array}{ccc} E_p{}^u & \xrightarrow{\phi_u} & W^u(p) \\ \tilde{g}_1 \downarrow & & \downarrow f \\ E_p{}^u & \xrightarrow{\phi_u} & W^u(p) \end{array}$$

そして，$(\tilde{g}_1)^{-1}$は縮小写像である．

(3)　$T_0\phi_u: T_0(E_p{}^u)=E_p{}^u \to T_p(M)$は包含写像である．

(4)　Mの点xにたいして，$x \in W^u(p)$となるための必要十分条件は，$\lim_{n\to\infty} f^{-n}(x)=p$となることである．

また，pの適当な近傍Uがあって，Mの点xが$W^u(p)$に属するための必要十分条件は，十分大きな$N \geqq 0$があって，$n \geqq N$なら$f^{-n}(x) \in U$が成立することである．

最後に双曲型周期点と，その安定多様体などを定義しよう．

MをコンパクトC^r多様体，$f: M \to M$をC^r微分同相写像とする$(r \geqq 1)$．点$p \in M$をfの周期点とし，n_0をその最小周期とする$(n_0 \geqq 1)$．すると，pはf^{n_0}の不動点となる．そこで，pがf^{n_0}の双曲型不動点となるとき，pをfの双曲型周期点と定義する．

そしてfの周期点pにおける**局所安定多様体，安定多様体**は，f^{n_0}の点pにおける局所安定多様体，安定多様体として定義する．そして$W_{\mathrm{loc}}{}^s(p)$, $W^s(p)$で表わす．

不安定多様体についても同様である．

§4　安定多様体(II)

MをコンパクトC^{r+1}多様体，$\tau(M)=(T(M), M, \pi)$をその接ベクトル束とする$(r \geqq 1)$．いま$s: M \to T(M)$をM上のC^rベクトル場とし，sの生成するMのC^r級1パラメーター変換群を$\phi: \boldsymbol{R} \times M \to M$とする．

いま$s(p)=0$となる点$p \in M$をsの**特異点**と定義する．すると，pがϕの特

異点，すなわち $\phi(t,p)=p$, $t\in \boldsymbol{R}$, となるための必要十分条件は，p が s の特異点となることである．このことは定義から容易に確かめられる．

(U,α)を p を含む M の C^{r+1} 座標近傍，E を α に対する Banach 空間とする．そして，$\bar{s}_\alpha:\alpha(U)\to E$ をつぎの式で定義する．

(1) $\bar{s}_\alpha(z)=\{\varphi_{\alpha^{-1}(z)}{}^{(\alpha)}\}^{-1}(s\alpha^{-1}(z)),\qquad z\in\alpha(U)$

ここで，$\varphi_{\alpha^{-1}(z)}{}^{(\alpha)}:E\to T_{\alpha^{-1}(z)}(M)$ は第7章§1の線型同相写像である．

すると，s の積分曲線は，写像 $\alpha:U\to\alpha(U)$ によって，$\bar{s}_\alpha$ の積分曲線にうつる(第7章§4を参照のこと)．

いま，点 p が s の特異点とすると，$\alpha(p)$は $\bar{s}_\alpha$ の特異点である．そこで，$\alpha(p)$が $\bar{s}_\alpha$ の基本特異点となるとき，p は s の**基本特異点**であると定義しよう．このような定義が可能であることは，つぎのようにして確かめることができる．

いま，(V,β)を p を含む M のもう1つの C^{r+1} 座標近傍，F を β に対する Banach 空間とする．そして，$\bar{s}_\beta:\beta(V)\to E$ を(1)と同様に定義する．すなわち，

$$\bar{s}_\beta(z')=\{\varphi_{\beta^{-1}(z')}{}^{(\beta)}\}^{-1}(s\beta^{-1}(z')),\qquad z'\in\beta(V)$$

とする．

そして $g:U\cap V\to\mathrm{Iso}\,(E\,;F)\subset\mathscr{L}(E\,;F)$を $g(y)=\{\varphi_y{}^{(\beta)}\}^{-1}\varphi_y{}^{(\alpha)}$, $y\in U\cap V$ と定義すると，これは C^r 級で，$g(y)=D(\beta\alpha^{-1})(\alpha(y))$, $y\in U\cap V$ が成立する．したがって，$g(y)^{-1}=D(\alpha\beta^{-1})(\beta(y))$, $y\in U\cap V$ となる(第7章§1を参照のこと)．

以上の関係式から

$$\bar{s}_\beta(z)=g(\beta^{-1}(z))(\bar{s}_\alpha(\alpha\beta^{-1}(z)),\qquad z\in\beta(U\cap V)$$

が成立する．そして，Leibnitz の公式，鎖法則，および $\bar{s}_\alpha(\alpha(p))=0$ となることから，

(2) $D\bar{s}_\beta(\beta(p))=g(p)D\bar{s}_\alpha(\alpha(p))D(\alpha\beta^{-1})(\beta(p))=g(p)D\bar{s}_\alpha(\alpha(p))g(p)^{-1}$

が成立する．ここで，$g(p):E\to F$ は線型同相写像だから，$D\bar{s}_\beta(\beta(p))$ と $D\bar{s}_\alpha(\alpha(p))$は同じスペクトルを持つ．したがって，$\alpha(p)$が $\bar{s}_\alpha$ の基本特異点なら，$\beta(p)$は $\bar{s}_\beta$ の基本特異点となる．

以上で，M の C^r ベクトル場 s の基本特異点の概念がうまく定義できることがわかった．

命題 1 M, s, ϕ を上に定義したものとする．いま，$\phi_t : M \to M$, $t \in \boldsymbol{R}$ を $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, $x \in M$ とおくと，点 $p \in M$ が s の基本特異点となるための必要十分条件は，p が C^r 微分同相写像 $\phi_1 : M \to M$ の双曲型不動点となることである．

また，このとき，各 $c \in \boldsymbol{R}(c \neq 0)$ に対して，p が $\phi_c : M \to M$ の双曲型不動点となる．

証明 p を含む M の C^{r+1} 座標近傍を (U, α) とし，α に対する Banach 空間を E とする．また，$\alpha(p)=0$ としても一般性を失なわないから，$\alpha(p)=0$ と仮定する．

p を s の特異点，すなわち ϕ の特異点とすると，任意の $t \in \boldsymbol{R}$ に対して，$\phi(t, p) = p$ となる．したがって，任意の正数 c に対して，$\phi([-c, c] \times \{p\}) = p$ となる．α によって，U と $\alpha(U)$ を同一視して考えると，§2 補題 3 から，適当な p の近傍 U_1, $(U_1 \subset U)$ があって $\phi([-c, c] \times U_1) \subset U$ とできる．そして，$\alpha(U_1)$ は $\alpha(p)=0$ を中心とする E の閉球としてよい．

いま，$\tilde{\phi} : [-c, c] \times \alpha(U_1) \to \alpha(U)$ を

$$\tilde{\phi}(t, z) = \alpha\phi(t, \alpha^{-1}(z)), \qquad (t, z) \in [-c, c] \times \alpha(U_1)$$

と定義し，$z \in \alpha(U_1)$ に対して $\tilde{\phi}^z : [-c, c] \to \alpha(U)$ を，$\tilde{\phi}^z(t) = \tilde{\phi}(t, z)$, $t \in [-c, c]$ と定義すると，$\tilde{\phi}^z$ は z を初期条件とする $\bar{s}_\alpha$ の積分曲線である(第 7 章 §4 参照)．したがって，$\tilde{\phi}(0, z) = z$, $z \in \alpha(U_1)$, $\tilde{\phi}(t, 0) = 0$ が成立する．そして，第 6 章 §4 定理 2(の証明)にあるように，つぎの公式が成立する．

(3) $$D_1 D_2 \tilde{\phi}(t, z) = D_2(\bar{s}_\alpha \tilde{\phi})(t, z), \qquad (t, z) \in [-c, c] \times \alpha(U_1)$$

一方，$\tilde{\phi}(0, z) = z$ から，$D_2\tilde{\phi}(0, z) = 1$, $z \in \alpha(U_1)$ が成立する．また，$\tilde{\phi}(t, 0) = 0$, $t \in [-c, c]$ および鎖法則から，$D_2(\bar{s}_\alpha \tilde{\phi})(t, 0) = D\bar{s}_\alpha(0) D_2\tilde{\phi}(t, 0)$, $t \in [-c, c]$ が成立する．

いま，$L = D\bar{s}_\alpha(0)$ とおくと，(3)式および上に述べたことから，つぎの式が成り立つ．

(4) $D_1D_2\tilde{\phi}(t,0) = LD_2\tilde{\phi}(t,0) = L_*(D_2\tilde{\phi}(t,0)), \quad t\in[-c,c],$

$D_2\tilde{\phi}(0,0) = 1$

ここで，$L_*:\mathcal{L}(E;E)\to\mathcal{L}(E;E)$ は $L_*(L_1)=LL_1$, $L_1\in\mathcal{L}(E;E)$ で定義される連続線型写像である．したがって，§1 定理3から，$D_2\tilde{\phi}(t,0)=(\exp tL_*)1=\exp tL$, $t\in[-c,c]$ となる．特に，$t=c$ として，つぎの式が成立する．

(5) $D_2\tilde{\phi}(c,0) = D\tilde{\phi}_c(0) = \exp cL$

ここで，$\tilde{\phi}_c:\alpha(U_1)\to\alpha(U)$ は $\tilde{\phi}_c(z)=\tilde{\phi}(c,z)$, $z\in\alpha(U_1)$ で定まる写像である．

§1 補題4から，p が s の基本特異点となることは，$\exp L$ が双曲型線型同相写像となることと同値である．したがって，(5)から，これは p が ϕ_1 の双曲型不動点となることと同値である．

この命題の後半は，(5)と上に述べたことから明らかである．▮

M, s, ϕ をいままでと同じものとし，$p\in M$ を s の基本特異点，(U,α) を p を含む M の C^{r+1} 座標近傍，E を α に対する Banach 空間，$\alpha(p)=0$ とする．$\bar{s}_\alpha:\alpha(U)\to E$ を(1)式で定義すると，$\bar{s}_\alpha(0)=0$ となり，$L=D\bar{s}_\alpha(0):E\to E$ のスペクトル $\sigma(L)$ は，仮定から実数部分が零の複素数を含まない．

いま，この L に関する E の L 不変な(位相)直和分解を $E=E_-\oplus E_+$ とする(§1 注意3を参照のこと)．線型同相写像 $\varphi_p{}^{(\alpha)}:E\to T_p(M)$ による E_-, E_+ の像をそれぞれ $E_-(p), E_+(p)$ とおくと，$T_p(M)=E_-(p)\oplus E_+(p)$ となるが，(2)から，この直和分解は M の C^{r+1} 座標近傍系(U,α)のとり方に無関係であることがわかる．そして命題1および，§1 注意3から，これは $\phi_1:M\to M$ の双曲型不動点 p における $T_p(M)$ の $T_p\phi_1$ 不変な直和分解 $T_p(M)=E_p{}^s\oplus E_p{}^u$ と一致することがわかる．

いま，ϕ_1 の p における安定多様体および不安定多様体を，それぞれ $W^s(p)$, $W^u(p)$ とし，これらを M の C^r ベクトル場 s の基本特異点 p における**安定多様体**および**不安定多様体**という．

定理 1 M を C^{r+1} 多様体，s を M の上の C^r ベクトル場，$\phi:\boldsymbol{R}\times M\to M$ を s の生成する M の C^r 級1パラメーター変換群とする($r\geqq 1$)．いま，$p\in M$ を s の基本特異点とし，$W^s(p)$ をその安定多様体，$T_p(M)=E_-(p)\oplus E_+(p)$

を上記の直和分解とすると，つぎのことが成立する．

(1)　適当な C^r 級はめこみ $\psi_s: E_-(p)\to M$ があって，$\psi_s(E_-(p))=W^s(p)$ となる．さらに，ψ_s は単射で，$\psi_s(0)=p$ とできる．

(2)　各 $t\in \boldsymbol{R}$ に対して，$\phi_t(W^s(p))=W^s(p)$ である．

(3)　$T_0\psi_s: T_0(E_-(p))=E_-(p)\to T_p(M)$ は包含写像である．

(4)　$x\in M$ として，$x\in W^s(p)$ となるための必要十分条件は，$\lim_{t\to\infty}\phi(t,x)=\lim_{t\to\infty}\phi_t(x)=p$ となることである．

また，p の適当な近傍 U があって，$x\in W^s(p)$ となるための必要十分条件は，十分大きな $T_0\geqq 0$ があって，$t\geqq T_0$ なら $\phi(t,x)=\phi_t(x)\in U$ となることである．

以上と同様なことが，p の不安定多様体 $W^u(p)$ についても成立する．

証明　(1), (3)は§3定理3と，$W^s(p)$ の定義およびこの定理の直前の注意から直ちにわかる．したがって，(2), (4)を証明すればよい．

いま，$\lim_{t\to\infty}\phi(t,x)=p$ とする．ϕ は M の1パラメーター変換群だから，$n\geqq 0$ を整数として，$\phi(n,x)=\phi_n(x)=\phi_1{}^n(x)$ が成立する．したがって $\lim_{n\to\infty}\phi_1{}^n(x)=p$ となる．ゆえに，§3定理3から，$x\in W^s(p)$ となる．

逆に，$x\in W^s(p)$ とすると，同じ定理から，$\lim_{n\to\infty}\phi_1{}^n(x)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=p$ となる．いま，V を p の任意の近傍とすると，p が ϕ の特異点であることから，命題1の証明と同様にして，p の適当な近傍 V_1, $(V_1\subset V)$ をとると，$\phi([0,1]\times V_1)\subset V$ とできる．また，$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=p$ だから，適当な整数 $N_0\geqq 0$ があって，$n\geqq N_0$ ならば $\phi_n(x)\in V_1$ となる．

いま，$t\geqq N_0$ とし，t を $t=n+t'$，n は整数，$0\leqq t'<1$ と表わすと，$n\geqq N_0$ となる．したがって，

$$\phi_t(x)=\phi_{t'}\phi_n(x)\in\phi_{t'}(V_1)\subset V$$

となる．すなわち，$\lim_{t\to\infty}\phi_t(x)=\lim_{t\to\infty}\phi(t,x)=p$ となる．

以上で，(4)の前半がわかったが，(4)の後半も同様に証明できる．

最後に，(2)を証明するため，$t_0\in\boldsymbol{R}$，$x\in W^s(p)$ とする．$x\in W^s(p)$ だから，(4)によって $\lim_{t\to\infty}\phi_t(x)=p$ となる．したがって，$\lim_{t\to\infty}\phi_t(\phi_{t_0}(x))=\lim_{t\to\infty}\phi_{t+t_0}(x)$

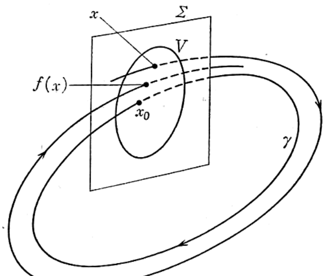
$=p$ である．再び(4)によって，$\phi_{t_0}(x)\in W^s(p)$ となる．すなわち，$\phi_{t_0}(W^s(p))\subset W^s(p)$ がわかった．したがって，第7章§4にあるように，$W^s(p)$ は ϕ の不変集合である．すなわち，$\phi_{t_0}(W^s(p))=W^s(p)$ が各 $t_0\in \boldsymbol{R}$ に対して成立する．▌

最後に，基本周期軌道とその安定多様体などについて，直観的な説明を与えておくことにしよう．

M を n 次元コンパクト C^{r+1} 多様体，s を M 上の C^r ベクトル場，$\phi:\boldsymbol{R}\times M\to M$ を s の生成する C^r 級1パラメーター変換群とする($(r\geqq 1)$.

いま，γ を ϕ の周期軌道とし，その最小周期を t_0, $(t_0>0)$ とする．x_0 を γ の点とし，x_0 を通り γ と横断的に交わる M の $(n-1)$ 次元部分多様体を Σ とする．Σ は M の閉部分多様体である必要はない．すると，このような Σ は必ず存在する．

V を x_0 の Σ における近傍とする．V を十分小さくとると，V の点 x を初期条件とする s の積分曲線 $\phi^x:\boldsymbol{R}\to M$ は，適当な正の値 t で Σ と交わる．そして，$\min\{t>0;\ \phi^x(t)\in\Sigma\}$ が存在する．いま，これを $t_0(x)$ とおくと，十分小さな V に対して，$t_0: V\to\boldsymbol{R}$ は正の値をとる C^r 級関数となる．



そこで，$f: V\to\Sigma$ を $f(x)=\phi(t_0(x),x)$，$x\in V$ と定義すると，f は C^r 級で，$f(x_0)=x_0$ となる．そして，V をさらに小さくとると，f は x_0 の近傍 V から x_0 の適当な近傍への C^r 微分同相写像となる．この f を，周期軌道 γ の **Poincaré 変換**という．

この Poincaré 変換は，$x_0 \in \gamma$ と Σ のとり方に関係して定まるが，その局所的な C^r 共役類は，これらのとり方に無関係に，一意的に定まる．すなわち，$x_1 \in \gamma$，Σ_1 を他のとり方とし，これらに対する Poincaré 変換を $f_1 : V_1 \to \Sigma_1$ とすると，x_0 の Σ における適当な近傍 U と，U から x_1 の Σ_1 における近傍への適当な C^r 微分同相写像 $h : U \to \Sigma_1$ があって，$h(x_0) = x_1$，$hf(x) = f_1 h(x)$，$x \in U$ をみたす．

そこで，いま，x_0 が f の双曲型不動点のとき，周期軌道 γ はベクトル場 s の**基本周期軌道**という．すると，上に述べたことから，これは f のとり方に無関係に γ だけに依存して定まる概念であることがわかる．

いま，γ を s の基本周期軌道とし，$x_0 \in \gamma$，Σ を上記のようにとって，$f : V \to \Sigma$ をその Poincaré 変換とする．そして，f の x_0 における局所安定多様体を $W_{\mathrm{loc}}{}^s(x_0, f) \subset \Sigma$ とし，$W^s(\gamma) = \bigcup_{t \in \boldsymbol{R}} \phi_t(W_{\mathrm{loc}}{}^s(x_0, f)) \subset M$ とおく．そして，$W^s(\gamma)$ を γ の**安定多様体**という．すると，やはり上に述べたことから，$W^s(\gamma)$ は Poincaré 変換 f のとり方に無関係に定まることがわかる．

γ の**不安定多様体** $W^u(\gamma)$ も同様に定義される．

いま，M の接ベクトル束 $\tau(M)$ を γ に制限したものを $\tau(M)|\gamma = (T_\gamma(M), \gamma, \pi_\gamma)$ とする．γ の各点 x に対して，$s(x) \in T_x(M)$ は零でないから，これは $T_x(M)$ の 1 次元部分ベクトル空間 $E_x{}^0$ を生成する．γ の最小周期が t_0 だから，γ の各点 x に対して，$\phi_{t_0}(x) = x$ となる．C^r 微分同相写像 $\phi_{t_0} : M \to M$ の x における微分 $T_x\phi_{t_0} : T_x(M) \to T_x(M)$ は線型同相写像で，$T_x\phi_{t_0}(s(x)) = s(x)$ をみたす．したがって，$E_x{}^0$ は $T_x\phi_{t_0}$ 不変で，$T_x\phi_{t_0}|E_x{}^0 : E_x{}^0 \to E_x{}^0$ は恒等写像，すなわちその固有値は 1 である．

いま，γ が s の基本周期軌道とすると，γ の各点 x において，$T_x(M)$ はつぎの条件をみたす $T_x\phi_{t_0}$ 不変な(位相)直和分解 $T_x(M) = E_x{}^0 \oplus E_x{}^s \oplus E_x{}^u$ をもつ．

(＊)　$T_x\phi_{t_0}|E_x{}^s : E_x{}^s \to E_x{}^s$ の固有値はすべて絶対値が 1 より小さい．また，$T_x\phi_{t_0}|E_x{}^u : E_x{}^u \to E_x{}^u$ の固有値はすべて絶対値が 1 より大きい．

このような $T_x(M)$ の直和分解は一意的であることは直ちにわかる．そこで，

$E^0=\bigcup_{x\in\gamma}E_x{}^0$, $E^s=\bigcup_{x\in\gamma}E_x{}^s$, $E^u=\bigcup_{x\in\gamma}E_x{}^u$ とおき，$\tau^0=(E^0,\gamma,\pi|E^0)$，$\tau^s=(E^s,\gamma,\pi|E^s)$，$\tau^u=(E^u,\gamma,\pi|E^u)$ とおくと，これらは $\tau(M)$ の部分ベクトル束であって，$\tau(M)=\tau^0\oplus\tau^s\oplus\tau^u$ (C^0 級 Whitney 和)が成立する．

以上の記号を用いて，つぎの定理が成立する．

定理 2　M をコンパクト C^{r+1} 多様体，s を M 上の C^r ベクトル場，ϕ を s の生成する C^r 級1パラメーター変換群とする($r\geqq 1$)．いま γ を s の基本周期軌道とし，$W^s(\gamma)$ をその安定多様体とすると，つぎのことが成立する．

(1)　適当な C^r 級はめこみ $\psi_s: E^0\oplus E^s\to M$ があって，ψ_s は単射で，$\psi_s(0_x)=x$，$x\in\gamma$ となる．ここで，$E^0\oplus E^u=\bigcup_{x\in\gamma}E_x{}^0\oplus E_x{}^s$ は $\tau^0\oplus\tau^s$ の全空間である．また，0_x は $E_x{}^0\oplus E_x{}^s$ の零元である．

(2)　各 $t\in \boldsymbol{R}$ に対して，$\phi_t(W^s(\gamma))=W^s(\gamma)$ である．

(3)　各 $x\in\gamma$ に対して，$T_{0_x}\psi_s: T_{0_x}(E^0\oplus E^s)=E_x{}^0\oplus E_x{}^s\to T_x(M)$ は包含写像である．

(4)　M の点 x が $W^s(\gamma)$ に属するための必要十分条件は，$\lim_{t\to\infty}d(\phi_t(x),\gamma)=0$ となることである．ここで，d は M の距離である．

また，$x\in W^s(\gamma)$ となるための必要十分条件は $\omega\lim(x)=\gamma$ となることである．

さらに，γ の適当な近傍 U があって，$x\in W^s(\gamma)$ となるための必要十分条件は，十分大きな $T_0\geqq 0$ に対して，$t\geqq T_0$ ならば $\phi(t,x)=\phi_t(x)\in U$ となることである．

γ の不安定多様体についても同様なことが成り立つ．

附録　微分可能な力学系の理論の現況

第2部において，微分可能な力学系の基礎的な事項について解説を加えたが，ここでは，S. Smale の仕事を中心として，1960年代から現在までの研究の一端を，ごく簡単に述べて，読者の参考に供したい．筆者の興味をもつ方向にのみ偏っていて，重要な事柄を見落していることもあると思うが，それなりの意味をもつと思うので，あえてここにつけ加えることにした．

さらに進んで研究しようと志す方は，ここであげる文献と，あとがきで述べることなどを参考にされるとよい．

§1　初期の発展について

ここでは，歴史的な発展をたどりながら，主として，連続力学系の初期の研究について述べることにする．

1937年ソ連の物理学者 Andronov と数学者 Pontrjagin は，その共著 [5] において，**構造安定性**の概念を導入した．これは，第7章§6で述べたように，物理学，生物学，工学などで使われる力学系が近似的にしか定まらないことが多いために考えられた概念である．すなわち，軌道の大域的な状態が，小さな摂動によって本質的に変化しないような力学系を，構造的に安定であるとした．

彼らは，平面の領域の上の解析的なベクトル場が，構造安定となるための必要十分条件を，その軌道の条件として与えることに成功した．これは，つぎに述べる定理1の条件とほぼ同じものである．

Andronov-Pontrjagin の仕事は，その後，アメリカやブラジルの数学者たちによって継承され，多くの仕事がなされた．1961 年これらの集大成として，Peixoto [33] はつぎの定理を得た．

定理 1　M を 2 次元コンパクト C^∞ 多様体とする．このとき，M の C^1 ベクトル場 s が構造安定となるための必要十分条件は，つぎの 4 つのことが成立することである．

(1)　s の特異点は有限個で，すべて基本特異点である．

(2)　s の周期軌道は有限個で，すべて基本周期軌道である．

(3)　s の鞍点の間を結ぶ軌道は存在しない．

(4)　M の各点 x に対して，$\alpha\lim(x)$，$\omega\lim(x)$ は特異点かまたは周期軌道である．

定理 2　2 次元コンパクト C^∞ 多様体 M の上の C^1 ベクトル場全体の空間 $\mathcal{X}^1(M)$ の中で，構造安定なもの全体のなす集合 $\mathcal{S}^1(M)$ は $\mathcal{X}^1(M)$ の稠密な開集合である．

このようなことを背景に，S. Smale は 1960 年，[48] において，つぎのような力学系を考察し，Morse の大域的変分学における Morse 不等式を拡張した．

M をコンパクトな n 次元 C^∞ 多様体とする．s を M の C^1 ベクトル場，ϕ を s の生成する M の 1 パラメーター変換群とする．いま，s がつぎの条件 (MS) をみたすとき，これを **Morse-Smale の力学系**という．

(MS)　(1)　ϕ の非遊走集合を Ω とする．すると，Ω は有限個の基本特異点 $\beta_1, \cdots, \beta_k$, および有限個の基本周期軌道 $\beta_{k+1}, \cdots, \beta_m$ からなる．

(2)　各 $i, j=1, \cdots, m$ に対し，β_i の安定多様体 $W^s(\beta_i)$ と β_j の不安定多様体 $W^u(\beta_j)$ は横断的に交わる．

さて，Smale の証明した定理はつぎのものである．

定理 3　s が M の上の Morse-Smale 力学系とすると，つぎのことが成立する．

(1)　$W^s(\beta_i)$，$i=1, \cdots, m$ は M の部分多様体であって，$M=\bigcup_{i=1}^{m} W^s(\beta_i)$ が成立する．

(2) $\overline{W^s(\beta_i)}$は適当な $W^s(\beta_j)$の和集合として表わすことができる．いま，$W^s(\beta_l)\subset\overline{W^s(\beta_k)}$のとき，$\beta_l\leqq\beta_k$ と定義すると，これは $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ の順序となる．そして，$\beta_l\leqq\beta_k$ ならば $\dim W^s(\beta_l)\leqq\dim W^s(\beta_k)$である．

(3) a_q を $\dim W^s(\beta_j)=q$ となる特異点 β_j, $j=1,\cdots,k$ の個数とし，b_q を $\dim W^s(\beta_j)=q+1$ となる周期軌道 β_j, $j=k+1,\cdots,m$ の個数とする．いま，$M_q=a_q+b_q+b_{q+1}$ とし，B_q を M の $\boldsymbol{Z}_2$ 係数の q 次元 Betti 数とすると，つぎの式が成立する．

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^iM_{q-i}\geqq\sum_{i=0}^{q}(-1)^iB_{q-i},\qquad q=0,1,\cdots,n,$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iM_i=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iB_i$$

M が 2 次元のとき，Morse-Smale の力学系の条件(MS)(1), (2)は定理 1 の条件(1)-(4)と同値となる．したがって，M の C^1 ベクトル場が構造安定となるための必要十分条件は，これが Morse-Smale の力学系であることである．また，C^1 級の Morse-Smale 力学系全体は $\mathcal{X}^1(M)$の稠密な開集合となる．

dim $M>2$ のとき，このようなことが成立しないことは知られているが，定理 1, 2 の部分的な拡張として，つぎのものがある．

定理 4 (Palis-Smale [32]) Morse-Smale の力学系は構造安定である．

定理 5 (Palis [30]) Morse-Smale 力学系全体の集合は $\mathcal{X}^1(M)$ の開集合である．

1963 年 I. Kupka [20] と S. Smale [49] は，Thom の横断性定理を用いて，つぎの定理を証明した．

定理 6 (**Kupka-Smale の近似定理**) コンパクト C^∞ 多様体の上の C^r ベクトル場($r\geqq1$)に対して，つぎの 3 つの性質は生成的である．したがって，任意の C^r ベクトル場は，つぎの性質をみたす C^r ベクトル場によって，いくらでも細かく近似できる．

(1) 特異点はすべて基本特異点である．

(2) 周期軌道はすべて基本周期軌道である．

(3)　基本特異点および基本周期軌道の安定多様体と不安定多様体は横断的に交わる.

同じ頃, ソ連の数学者 D. V. Anosov は Hamilton の力学系から発する**負曲率空間の測地流**を研究し, これが構造的に安定で, かつエルゴード的であることを示した. Anosov によるこの問題の定式化はつぎの通りである.

M をコンパクトな Riemann 多様体とし, $\phi: \boldsymbol{R}\times M\to M$ をその1パラメーター変換群とする. いま, M の接ベクトル束 $\tau(M)=(T(M), M, \pi)$ がつぎの性質(A)をみたす3つの部分ベクトル束 $\tau^0=(E^0, M, \pi^0)$, $\tau^s=(E^s, M, \pi^s)$, $\tau^u=(E^u, M, \pi^u)$ の Whitney 和 $\tau^0\oplus\tau^s\oplus\tau^u$ (C^0 級) となるとき, ϕ を **Anosov 力学系**という.

(A)　(1)　τ^0, τ^s, τ^u は $T\phi$ 不変である. すなわち, 各 $t\in\boldsymbol{R}$ にたいして, $\phi_t: M\to M$ を $\phi_t(x)=\phi(t, x)$, $x\in M$ と定義し, ϕ_t の $x\in M$ における微分を $T_x\phi_t: T_x(M)\to T_{\phi_t(x)}(M)$ とすると, $T_x\phi_t(E_x{}^\alpha)=E_{\phi_t(x)}{}^\alpha$, $\alpha=0, s, u$ が成立する. ここで, $E_x{}^\alpha$ は E^α の x 上のファイバーである.

(2)　ϕ を生成する M のベクトル場を s とすると, 各 $x\in M$ にたいして, E^0x は $s(x)$ で生成される $T_x(M)$ の1次元部分ベクトル空間である.

(3)　$\|\cdot\|$ を M の Riemann 計量による接ベクトルの長さとすると, 適当な定数 $c>0$, $\lambda>0$ があって, 任意の $t\geqq 0$ に対して, つぎの式が成立する.

$$\|\phi_t(v)\|\leqq ce^{-\lambda t}\|v\|, \qquad v\in E^s,$$

$$\|\phi_{-t}(v)\|\leqq ce^{-\lambda t}\|v\|, \qquad v\in E^u$$

Anosov 力学系の定義は M の Riemann 計量のとり方に無関係であることがわかる. そして, Anosov はつぎの定理を証明した([6]).

定理 7　(1)　M の上の Anosov 力学系 ϕ は構造安定である. そして, その特異点および周期軌道は可算個存在する.

(2)　ϕ 不変な M の Lebesgue 測度が存在すれば, その特異点および周期軌道全体の集合は, M の中で稠密である. また, ϕ が C^2 級なら ϕ はエルゴード的である.

この定理と, 負曲率空間の測地流が Anosov 力学系であって定理7の条件

をみたすことから，Anosov は初めに述べた結果を得た．

さて，S. Smale や Anosov らは上のような研究を連続力学系のみでなく，離散力学系についても考察し，同様な結果を得た．そして，離散力学系における諸定理の証明は，より簡明で，理論的にも美しく，独自の存在価値をもつものであることがわかって来た．

さらに，それだけではなく，**懸垂**の方法を用いたり，離散力学系における理論を応用したり，または多少の修正をしたりすることによって，連続な力学系の諸定理が得られることがわかる．このように，他の関連領域へも直ちに応用できることから，離散力学系の理論が急速に発展することとなった．

§2　離散力学系の理論を中心として

Peixoto, Smale, Anosov らの先駆的な仕事に続いて，Smale を中心とする学派は，微分可能な力学系の理論を発展させ，これを数学の 1 分野として定着させた．そこで，この理論の骨組みのあらましを簡単に解説しよう．簡単のため，ここでは，力学系は離散力学系を意味するものとする．そして，定義や定理などはすべて離散型の場合について述べることにするが，連続力学系についてのそれに対応する定理については，文献だけをつけることにする．

微分可能な力学系の理論の中心となるものは，双曲型集合の安定多様体の理論と Axiom A である．いま，M をコンパクト C^∞ 多様体とする．$f: M \to M$ を C^r 微分同相写像，すなわち C^r 力学系とする．M の閉集合 Λ がつぎの性質をみたすとき，Λ を f の**双曲型集合**という．

(H)　(1)　Λ は f 不変である．すなわち $f(\Lambda)=\Lambda$ である．

(2)　M の接ベクトル束 $\tau(M)=(T(M), M, \pi)$ を Λ に制限したものを $\tau(M)|\Lambda=(T_\Lambda(M), \Lambda, \pi_\Lambda)$ とすると，これはつぎの性質をみたす 2 つの部分ベクトル束 $\tau^s=(E^s, \Lambda, \pi^s)$，$\tau^u=(E^u, \Lambda, \pi^u)$ の Whitney 和(C^0 級)に分解される．

(イ)　τ^s, τ^u は Tf 不変である．すなわち，f の点 $x \in M$ における微分を $T_x f: T_x(M) \to T_{f(x)}(M)$ とすると，

$$T_x f(E_x{}^s) = E_{f(x)}{}^s, \qquad T_x f(E_x{}^u) = E_{f(x)}{}^u, \qquad x \in \Lambda$$

が成立する．ここで，$E_x{}^\alpha$ は E^α の x 上のファイバーとする($\alpha = s, u$)．

(ロ)　$\tau(M)|\Lambda$ の適当な Finsler 構造と，定数 $c>0$，$0<\lambda<1$ があって，すべての整数 $n \geqq 0$ に対して，つぎの式が成立する．

$$\|Tf^n(v)\| \leqq c\lambda^n \|v\|, \qquad v \in E^s,$$

$$\|Tf^{-n}(v)\| \leqq c\lambda^n \|v\|, \qquad v \in E^u$$

ここで，$\|\cdot\|$ は $\tau(M)|\Lambda$ の Finsler 構造によるノルムである．

$\Lambda = \{x_0\}$ のとき，Λ が f の双曲型集合であることは，x_0 が f の双曲型不動点であることである．また，Λ が f の周期点 x_0 の軌道 Orb(x_0)のとき，これは x_0 が f の双曲型周期点ということである．

Axiom A　**(a)**　f の非遊走集合 $\Omega(f)$ は双曲型である．

(b)　f の周期点全体の集合 Per(f) は $\Omega(f)$ の中で稠密である．

この公理は，Morse-Smale の力学系，Anosov 力学系および**馬蹄形力学系**と呼ばれるもう 1 つの重要な力学系を，統一的に見ることのできる重要なものである．

C^r 力学系 $f: M \to M$ が **Morse-Smale** であるとは，つぎの条件が成立するときをいう．

(MS)　(1)　$\Omega(f)$ は有限個の双曲型周期点(不動点も含む)からなる．

(2)　$\Omega(f)$ の任意の 2 点 p, q に対して，p の安定多様体 $W^s(p)$ と q の不安定多様体 $W^u(q)$ は横断的に交わる．

この (MS) (1) は上の Axiom A の特別な場合，すなわち，$\Omega(f)$ が有限集合のときである．

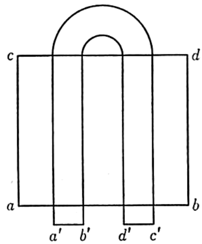
Morse-Smale の力学系に対して，§1 の定理 3, 4, 5 と同様な定理が成立する (Smale [48], Palis-Smale [32], Palis [30])．

C^r 力学系 $f: M \to M$ が **Anosov** とは，つぎの条件が成立するときをいう．

(A)　M 自身が f の双曲型集合である．

このとき Axiom A(a)が成立することは明らかであるが，Axiom A(b)が成立することも知られている(Anosov [6], Franks [15])．したがって，Anosov 力学系は Axiom A をみたす．そして，§1定理7と同様な定理が成立する(Anosov [6], Moser [26])．したがって Ω は可算集合となり，Morse-Smale の力学系とは異なるものである．

馬蹄形力学系は Smale [50] によって研究されたものである．たとえば下図の正方形 $abcd$ を ab 方向を圧縮し，同時に ac 方向に伸張させて長方形とし，これをその真中のあたりで，曲げて図の $a'b'c'd'$ へ写すような写像を考える．これは2次元球面 S^2 の微分同相写像に拡張することができる．これを $f: S^2 \to S^2$ とする．



これは Axiom A をみたす力学系であって，$\Omega(f)$ は2つの Cantor 集合の直積 Ω_0 を含み，$f(\Omega_0)=\Omega_0$ で，$f|\Omega_0: \Omega_0 \to \Omega_0$ は，古くからエルゴード理論で知られていた，**Bernoulli 変換**と位相的に共役であることがわかる．

また，これが Morse-Smale や Anosov でないことも，簡単に確かめられる．したがって，これは Morse-Smale と Anosov の力学系の中間にあって，Axiom A をみたす重要な力学系である．

以下この Axiom A をみたす力学系を中心として，微分可能な力学系の理論を概観することにしよう．

C^r 力学系 $f: M \to M$ の非遊走集合 $\Omega(f)$ がつぎの性質をもつとき，f は**スペクトル分解**をもつという．

(S)　(1)　$\Omega(f)$ は互いに交わらない有限個の f 不変な閉集合 $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ の

和集合である．

(2)　$f|\Omega_i:\Omega_i\to\Omega_i$, $i=1,\cdots,k$ は**位相推移的**である，すなわち，Ω_i の適当な点 x_i があって，x_i を通る軌道 $\mathrm{Orb}\,(x_i)$ は Ω_i で稠密となる．

定理 1　(Smale [52])　f が Axiom A をみたすなら，f はスペクトル分解をもつ．このスペクトル分解 $\Omega(f)=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_k$ は，番号のつけ方を除いて一意的である．

いま，f が Axiom A をみたすものとする．そして，そのスペクトル分解を $\Omega(f)=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_k$ とする．この Ω_i を**基底集合**という．この基底集合を位相的に分類することは大きな問題であるが，まだあまりよくわかっていない．この方向への論文としては，Bowen [10], Bowen-Lanford [12], Sinai [47], Smale [50], Williams [55] などがある．

つぎに，$W^s(\Omega_i)=\{x\in M;\ \omega\lim(x)\subset\Omega_i\}$，$W^u(\Omega_i)=\{x\in M;\ \alpha\lim(x)\subset\Omega_i\}$ とおき，これらを Ω_i の**安定**および**不安定集合**という．Smale は定理 1 の系として，つぎの結果を得た．

定理 1 の系　(Smale [52])　f が Axiom A をみたすなら，$M=\bigcup_{i=1}^{k}W^s(\Omega_i)$ となる．そして，$i\neq j$ ならば $W^s(\Omega_i)\cap W^s(\Omega_j)=\phi$ である．

また，$W^s(\Omega_i)\cap W^u(\Omega_i)=\Omega_i$ である．

いま $\Omega(f)$ のスペクトル分解 $\Omega(f)=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_k$ において，$(W^u(\Omega_i)-\Omega_i)\cap(W^s(\Omega_j)-\Omega_j)\neq\phi$ のとき，$\Omega_j<\Omega_i$ と定義する．そして，$\Omega_{i_0}<\Omega_{i_1}<\cdots<\Omega_{i_l}=\Omega_{i_0}$, $l\geqq 1$ となる $(\Omega_{i_0},\Omega_{i_1},\cdots,\Omega_{i_l})$ を**サイクル**という．そして，サイクルが存在しないとき，f は**サイクルを持たない**という．

さて，2 つの C^r 力学系 $f:M\to M$, $g:N\to N$ が **Ω 同値**とは，適当な同相写像 $h:\Omega(f)\to\Omega(g)$ があって，つぎの図が可換となるときをいう．

$$\begin{array}{ccc}\Omega(f) & \xrightarrow{\ f\ } & \Omega(f)\\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h}\\ \Omega(g) & \xrightarrow{\ g\ } & \Omega(g)\end{array}$$

このとき，$f\underset{\Omega}{\sim}g$ と表わすことにすると，これは同値関係である．この Ω 同値

関係による安定性を **Ω 安定性**という．すなわち，$f: M \to M$ が Ω 安定とは，f の $\mathrm{Diff}^r(M)$ における適当な近傍 $\mathcal{U}(f)$ があって，$g \in \mathcal{U}(f)$ なら $f \underset{\Omega}{\sim} g$ となるときである．

この Ω 安定性について，つぎの定理がある．

定理 2 (Smale [53], Pugh-Shub [37]) f が Axiom A をみたし，サイクルを持たないなら Ω 安定である．

Smale はこの定理を得て，つぎのような予想を述べた．

予想 f が Ω 安定となるための必要十分条件は，f が Axiom A をみたし，サイクルを持たないことである．

この方向に関して，つぎのことが知られている．

定理 3 (Palis [31]) f が Axiom A をみたし Ω 安定なら，f はサイクルを持たない．

いま，$f: M \to M$ を C^r 力学系とし，d を M の距離とする．そうして，$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ となる M の 2 点 x, y は s 同値といい，$x \underset{s}{\sim} y$ と表わす．これは M の同値関係となる．x を含む同値類を $W^s(x)$ とし，x の**安定集合**という．

同様に，$\lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0$ のとき，$x \underset{u}{\sim} y$ と定義し，x の同値類を $W^u(x)$ と表わす．そして，これを x の**不安定集合**という．

定理 4 (Smale [52], Hirsch-Pugh [17]) C^r 力学系 f が Axiom A をみたすなら，$W^s(x)$ は Euclid 空間からの C^r 級はめこみの像である．そして，このはめこみは，単射にできる．

さらに $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ をスペクトル分解とすると，$W^s(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x)$ となる．

不安定集合についても同様なことが成り立つ．

Axiom A をみたす力学系 $f: M \to M$ に対して，つぎの条件が成立するとき，f は**強横断性条件**をみたすという．

(ST) M の任意の 2 点 x, y に対して，$W^s(x)$ と $W^u(y)$ は横断的に交わる．

Morse-Smale の力学系および Anosov の力学系は，この強横断性条件をみ

たすことが証明できる．そして，Palis-Smale は Morse-Smale の力学系が構造安定であることを証明したとき，つぎのような予想をした([32])．

予想　$f: M \to M$ が構造安定となるための必要十分条件は，f が Axiom A をみたし，強横断性条件をみたすことである．

この方向への大きな成果は，つぎのものである．

定理 5　(Robbin [39], Robinson [41])　f が C^2 級で Axiom A をみたし，さらに強横断性条件をみたすなら，f は $\mathrm{Diff}^1(M)$ で構造安定である．

つぎに，力学系の生成的な性質について考察しよう．M の上の構造安定な力学系全体の集合が，力学系全体の空間の稠密な部分集合であるか，という問題が初めの間大きな問題であったが，これは Smale [51] によって否定された．そこで考えられたのが Ω 安定な力学系であった．しかし，これも稠密でないことが Abraham-Smale [4], Newhouse [27] によって示された．また同じ論文で，Axiom A(a) が生成的でないこともわかった．

ここで，現在まで知られている，重要な生成的性質を述べることにしよう．

定理 6　(Kupka [20], Smale [49])　つぎの性質は生成的である．

(1)　f の周期点(不動点も含む)はすべて双曲型である．

(2)　f の任意の周期点 p, q に対して，$W^s(p)$ と $W^u(q)$ は横断的に交わる．

定理 7　(**Closing lemma**, Pugh [34])　f を C^1 力学系とし，$x \in \alpha \lim(x) \cup \omega \lim(x)$ とする．このとき f の $\mathrm{Diff}^1(M)$ における任意の近傍 $\mathcal{U}$ に対して，適当な $g \in \mathcal{U}$ が存在して，x は g の周期点となる．

この定理から，つぎのことがわかる．

定理 8　(Pugh[35])　Axiom A(b) は $\mathrm{Diff}^1(M)$ で生成的である．

定理 7, 8 が，一般の $r>1$ で成立するかどうかは大きな問題である．

以上のようなものの他に，最近得られた結果の中から，面白そうなものを 2, 3 あげてみよう．

定理 9　(Shub [46])　$\mathrm{Diff}^r(M)$ の中で，構造安定な力学系全体の集合は C^0 位相で稠密である．

力学系 f の周期が m の周期点の個数を $N_m(f)$ とする．いま，これがすべ

ての $m \geqq 1$ に対して有限とし，つぎの関数を考える．$\zeta_f(t) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} t^m\right)$．これを f の**ゼーター関数**という．

定理 10 (Manning [22])　f が Axiom A をみたすなら，ζ_f は有理関数である．

Anosov 力学系に関する話題については，筆者の総合報告 [43] を参照されたい．この方面で得られた最近の重要な結果としては Manning [23] がある．

Morse-Smale の力学系については，Smale [48] の仕事の継承として Shub [45] がある．

また，Axiom A をみたす力学系の位相的エントロピーについては，Bowen [9], [11] がある．

以上で，微分可能な力学系についての簡単な紹介を終ることにする．さらに詳しく，この概要を知りたい人は，つぎの総合報告を読まれるようおすすめする．Smale [52], [54], Shub [44], Anosov-Sinai [7], Robbin [40], Markus [24]．またこの本のあとがきで述べる文献もみられるとよい．

あとがき

最初に，第2部の各章について参考文献をあげることにしよう．

第6章§1,§2,§4は主として Irwin [19] によった．Irwin はもう少し一般的な場合も扱っているので，さらに進んで研究する場合は一読されると有益であろう．§3の逆関数定理や陰関数定理のもう少し簡単な形での簡単な証明は多くの本にある．例えば，Dieudonné [13], Lang [21] などを参照されたい．

第7章§1,§2,§3,§4は Lang [21] を参考にした．この本は，微分可能多様体について基礎的なことをまとめたものであって，さらに進んで勉強しようとする人は，これを読むことを強くおすすめする．§5の位相力学については斉藤 [42] をみられたい．また，離散力学系の懸垂については Smale [49] がよい．§6は Abraham-Robbin [3], Morlet [25] を参考にしたが，$\mathrm{Diff}^r(M)$ についてさらに詳しく研究するときは，Abraham [1], Eells[14] などを参考にするとよい．

第8章§1は Palis [29], Nitecki [28] などを参考にした．また，§2,§3は Irwin [19], Palis [29], Pugh [36], Hartman [16], Smale [49]を参考にした．常微分方程式の基本特異点の局所安定性については，ここで述べなかったが，Abraham-Robbin [3] にもある．§4は Smale [49] によった．基本周期軌道の安定多様体について，さらに詳しく知りたい人は，Abraham-Robbin [3], Irwin [18], Smale [49] を参照されたい．また双曲型集合の安定多様体については，Hirsch-Pugh [17], Nitecki [28], Robbin [38], Smale [52] を参照するとよい．

最後に，さらに進んで勉強する人のための一般的な参考書について，簡単な解説を加えることにする．

Abraham-Marsden [2] は，プリンストン大学の物理学科の大学院生のため

に，1966年に開講された講義をもとにしたものであって，解析力学，微分可能な力学系，三体問題など，力学一般の概略を述べたものである．したがって，全体的な見通しを得るためには便利である．初等的な部分の証明はあるが，大部分は証明を附さず，文献をあげている．

Abraham-Robbin [3] は，Thom の横断性定理の拡張である Abraham の横断性定理を証明し，この応用として，Kupka-Smale の近似定理を，連続力学系の場合に証明したものである．

Arnold-Avez [8] は，エルゴード理論を中心にして古典力学を述べたものであって，Anosov の仕事の紹介もある．証明はないことが多いが，Abraham-Marsden [2] には欠けている方面の概要がわかる．

Nitecki [28] は，離散力学系の場合の Smale 学派の仕事を，1970年頃までの結果を中心に述べたものであって，この本と一部分重複するが，この本を読んだ後で読むとよいであろう．円周 S^1 の微分同相写像に詳しいのが特長である．

以上の外，つぎの論文集は重要である．

Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math. Vol. **14** (1970), Amer. Math. Soc.

Peixoto: Dynamical Systems, Proc. Symp. at Salvador (1971), Academic Press.

最後に，微分可能な力学系の分野の創立者である Smale 自身による総合報告 Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817 をあげて，このあとがきを終えることにする．

参 考 文 献

[1] R. Abraham : Lectures of Smale on Differential Topology, Mimeographed Notes, Columbia Univ., 1962.

[2] R. Abraham–J. Marsden : Foundations of Mechanics, Benjamin, New York, 1967.

[3] R. Abraham–J. Robbin : Transversal Mappings and Flows, Benjamin, New York, 1967.

[4] R. Abraham–S. Smale : Non-genericity of Ω-stability, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 5–8.

[5] A. Andronov–L. Pontrjagin : Systèmes grossiers, Dokl. Akad. Nauk SSSR 14 (1937), 247–251.

[6] D. V. Anosov : Geodesic Flows on Closed Riemann Manifolds with Negative Curvature, Proc. Steklov Inst. Math. 90 (1967), 1–235.

[7] D. V. Anosov–Ja. G. Sinai : Certain Smooth Ergodic Systems, Russian Math. Surveys 22 (1967), 103–167.

[8] V. I. Arnold–A. Avez : Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier–Villars, Paris, 1966. (邦訳, アーノルド・アベズ:古典力学のエルゴード問題, 吉岡書店)

[9] R. Bowen : Topological Entropy and Axiom A, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 23–42.

[10] R. Bowen : Markov Partitions for Axiom A Diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 725–747.

[11] R. Bowen : Entropy versus Homology for Certain Diffeomorphisms, Topology 13 (1974), 61–67.

[12] R. Bowen–O. E. Lanford : Zeta Functions of Restrictions of the Shift Transformations, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 43–50.

[13] J. Dieudonné : Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1960.

[14] J. Eells : A Setting for Global Analysis, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 751–807.

[15] J. Franks : Anosov Diffeomorphisms, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 61–94.

[16] P. Hartman : Ordinary Differential Equations, Wiley, New York, 1964.

[17] M. W. Hirsch–C. Pugh : Stable Manifolds and Hyperbolic Sets, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 133–165.

[18] M. C. Irwin : A Classification of Elementary Cycles, Topology 9 (1970), 35–47.

[19] M. C. Irwin : On the Smoothness of the Composition Map, Quart. J. Math.,

Oxford (2) 23 (1972), 113–133.

[20] I. Kupka : Contribution à la théorie des champ génériques, Contributions to Differential Equations 2 (1963), 457–484 ; 3 (1964), 411–420.

[21] S. Lang : Differential Manifolds, Addison–Wesley, 1972.

[22] A. Manning : Axiom A Diffeomorphisms Have Rational Zeta Functions, Bull, London Math. Soc. 3 (1971), 215–220.

[23] A. Manning : There are no New Anosov Diffeomorphisms on Tori, To appear in Amer. J. Math.

[24] L. Markus : Lectures in Differentiable Dynamics, Regional Conference Series in Math. No. 3, Amer. Math. Soc. (1969).

[25] C. Morlet : Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney, Sém. H. Cartan (1961–62), No. 4. École Normale Supérieure, Paris, 1963.

[26] J. Moser : On a Theorem of D. Anosov, J. Diff. Eq. 5 (1969), 411–440.

[27] S. Newhouse : Non-density of Axiom A (a) on S^2, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 191–202.

[28] Z. Nitecki : Differentiable Dynamics, The M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1971.

[29] J. Palis : On the Local Structure of Hyperbolic Points in Banach Spaces, Anais da Acad. Brasileira de Ciêncas 40 (1968), 263–266.

[30] J. Palis : On Morse–Smale Dynamical Systems, Topology 8 (1969), 385–404.

[31] J. Palis : A Note on Ω-stability, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 221–222.

[32] J. Palis–S. Smale : Structural Stability Theorems, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 223–232.

[33] M. Peixoto : Structural Stability on Two-dimensional Manifolds, Topology 1 (1962), 101–120.

[34] C. Pugh : The Closing Lemma, Amer. J. Math. 89 (1967), 956–1009.

[35] C. Pugh : An Improved Closing Lemma and a General Density Theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010–1022.

[36] C. Pugh : On a Theorem of P. Hartman, Amer. J. Math. 91 (1969), 363–367.

[37] C. Pugh–M. Shub : The Ω-stability Theorem for Flows, Inventiones Math. 11 (1970), 150–158.

[38] J. Robbin : Stable Manifolds of Semi-hyperbolic Fixed Points, Ill. J. Math. 15 (1970), 595–609.

[39] J. Robbin : A Structural Stability Theorem, Ann. of Math. 94 (1971), 447–493.

[40] J. Robbin : Topological Conjugacy and Structural Stability for Discrete Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 923–952.

[41] C. Robinson : Structural Stabilily of Vector Fields, Ann. of Math. 99 (1974), 154–175.

[42] 斉藤利弥 : 位相力学, 共立出版, 1971.

[43] 白岩謙一 : Anosov 微分同相写像について, 数学 26 (1974).

[44] M. Shub : Stability and Genericity for Diffeomorphisms, Proc. Int. Symp. on Dynamical Systems, Brazil (1971), 493–514.

[45] M. Shub : Morse–Smale Diffeomorphisms are Unipotent on Homology, Proc. Int. Symp. on Dynamical Systems, Brazil (1971), 489–491.

[46] M. Shub : Structurally Stable Diffeomorphisms are Dense, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 817–818.

[47] Ja. G. Sinai : Markov Partitions and C-diffeomorphisms, Functional Analysis and its Applications 2 (1968), 61–82.

[48] S. Smale : Morse Inequalities for a Dynamical System, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 43–49.

[49] S. Smale : Stable Manifolds for Differential Equations and Diffeomorphisms, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 17 (1963), 97–116.

[50] S. Smale : Diffeomorphisms with Many Periodic Points, Differential and Combinatorial Topology, Symp. in Honor of M. Morse, Princeton Univ. Press, Princeton, 1964.

[51] S. Smale : Structurally Stable Systems are not Dense, Amer. J. Math. 88 (1966), 491–496.

[52] S. Smale : Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747–817.

[53] S. Smale : The Ω-stability Theorem, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 289–298.

[54] S. Smale : Notes on Differentiable Dynamical Systems, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 277–288.

[55] R. F. Williams : Classification of Subshifts of Finite Type, Ann. of Math. 98 (1973), 120–153 ; Errata, ibid. 99 (1974), 380–381.

索　　引

あ 行

か 行

さ 行

た　行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

力学系の理論

1974年10月30日　第1刷発行 ©

¥2200

著　者　白岩謙一（しらいわ けんいち）

発行者　岩波雄二郎

東京都千代田区一ツ橋2-5-5

発行所　株式会社 岩波書店

落丁・乱丁本はお取替いたします　精興社印刷・松岳社製本

数学選書 (A5判並製)

現代の数学は，新分野の進展によって，今世紀前半と様相をいちじるしく異にしております．小社はかつて，1940年代に「現代数学叢書」を刊行し，当時の斬新な諸問題の紹介につとめ，また，1954年以降にはシリーズ「現代数学」を刊行し，現代数学の“根底にあるもの”の徹底的解説をこころみてきましたが，ここに新たに「数学選書」を発刊いたします．この選書は，現代の数学から，もっとも活発に研究の行なわれている諸部門をえらび出し，それについて，第一線の研究者による解説をこころみたものであります．叙述は，形式にこだわらず，自由な展開を意図しておりますが，同時に，数学のみならず，物理学・工学等を専攻する読者をも考慮し，明快なものとするよう心掛けました．本シリーズが多くの読者の御期待にそえることを心から願ってやみません．

擬微分作用素	熊ノ郷 準著	336頁 2500円
群とデザイン	永尾 汎著	284頁 2200円
力学系の理論	白岩謙一著	302頁 2200円
現代の球関数	竹内 勝著	近刊
発展方程式	田辺広城著	近刊